4. cvičení - Řady - d'Alembert + Cauchy

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Řešení: Užijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2\cdot 2^n}\frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

$1/2 < 1$, tedy řada konverguje.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n}+3^{2n}}$$

Řešení: Použijeme odmocninové kritérium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6^n}{2^{2n}+3^{2n}}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt[n]{4^n+9^n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt[n]{9^n}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} < 1,$$

tedy řada konverguje.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

Řešení: Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}\frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0.$$

Řada konverguje.

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^k}{7}\right)^k$$

Použijeme zobecněné odmocninové kritérium. Je

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2+(-1)^k}{7}\right)^k} = \limsup_{k\to\infty} \frac{2+(-1)^k}{7} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{3}{7} = \frac{3}{7} < 1,$$

(dokonce rovnost), řada tedy konverguje. Limes superior je nutno použít, protože limita by neexistovala, zato limes superior existovat musí.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n + 3^n}$$

Řešení: Použijeme odmocninové kritérium. Máme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^7}{2^{n+1}+3^{n+1}}}{\frac{n^7}{2^n+3^n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^7}{n^7} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^7 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3} < 1.
\end{aligned}$$

Řada konverguje.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$$

Řešení: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ Podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!n!n!5^n}{(n+1)!(n+1)!(2n)!5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \frac{1}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5} < 1.$$

Tedy řada konverguje.

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$$

Řešení: Odmocninové kritérium, verze (a).

$$\left|\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right| \leq \frac{2}{3}$$

Tuto nerovnost ověřte. Našli jsme $q < 1$, které omezuje posloupnost a_n $\forall n$, tedy řada konverguje.

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

Řešení:

Použijeme odmocninové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{n+1-2} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

tedy řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n-1}$$

Řešení: Vyšetříme pomocí podílového kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \cdot \frac{2^n-1}{2^{n+1}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} \cdot \frac{1-1/2^n}{2-1/2^n} = \frac{1}{2} < 1,$$

tedy řada konverguje.

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Řešení:
Řada nekonverguje, neboť

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}$$

Řešení: Použijeme odmocninové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n^2-1}$$

$$\overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{-1} = \frac{1}{e} \cdot 1 < 1,$$

tedy řada konverguje.

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

Řešení:
Otestujeme nejprve nutnou podmínku konvergence. Použijeme větu a převedeme n-tou odmocninu na podíl

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

tedy řada diverguje.

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad, $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$$

Řešení:

Pro $|x| < 1$ konverguje absolutně podle podílového kritéria, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4 \cdot |x|^{k+1}}{k^4 \cdot |x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4}{k^4} \cdot |x| = |x| < 1.$$

Pokud $|x| \geq 1$, nekonverguje, neboť $\lim k^4|x|^k = +\infty$, a proto není možné, aby $\lim k^4 x^k = 0$.

Zkouškové příklady

3. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1} z^n, \qquad z \in \mathbb{R}.$

   Řešení: Pro $z = 0$ jsou všechny členy řady nulové, tedy řada konverguje.
   Pro $z \neq 0$ vyšetříme absolutní konvergenci podílovým kritériem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1}|z|^{n+1}}{\frac{2^n}{2^n+1}|z|^n} = \lim_{n\to\infty} |z| \frac{2\cdot(2^n+1)}{2^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} 2|z| \frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} \overset{AL}{=} |z|.$$

   Zatím máme, že řada konverguje pro $|z| < 1$ a diverguje pro $|z| > 1$.
   Zbývá vyšetřit body $z = 1$, $z = -1$. Pro $z = 1$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1},$$

   která ale nesplňuje nutnou podmínku konvergence.
   Pro $z = -1$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1}(-1)^n,$$

   která též nesplňuje nutnou podmínku konvergence.
   Závěr: Řada konverguje právě tehdy, když $z \in (-1, 1)$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$

   Řešení: Vyšetříme absolutní konvergenci podílovým kritériem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} = \frac{1}{2} < 1.$$

   Řada tedy konverguje absolutně a tedy konverguje.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}$

Řešení: Vyšetříme řadu za pomoci Cauchyho kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{e} \cdot 1 < 1.$$

Tedy řada konverguje.

Zdůvodnění limit:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Pro druhou limitu

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n+1}$$

najdeme dva strážníky

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} \to 1 \cdot 1.$$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(2^{2^n}+1)}{\ln(2^{4^n}+1)}$

Řešení: Vyšetříme řadu za pomoci podílového kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(2^{2^{n+1}}+1)}{\ln(2^{4^{n+1}}+1)}}{\frac{\ln(2^{2^n}+1)}{\ln(2^{4^n}+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^{2^{n+1}}+1)}{\ln(2^{2^n}+1)} \cdot \frac{\ln(2^{4^n}+1)}{\ln(2^{4^{n+1}}+1)}$$

Vytkneme nejrychlejší člen a použijeme vzorce pro logaritmus:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2^{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)\right)}{\ln\left(2^{2^n}\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)\right)} \cdot \frac{\ln\left(2^{4^n}\left(1+\frac{1}{2^{4^n}}\right)\right)}{\ln\left(2^{4^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2^{4^{n+1}}}\right)\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)}{2^n \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)} \cdot \frac{4^n \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2^{4^n}}\right)}{4^{n+1}\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2^{4^{n+1}}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln 2 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)}{2^n}}{\ln 2 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{2^n}} \cdot \frac{\ln 2 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{4^n}}\right)}{4^n}}{4\ln 2 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{4^{n+1}}}\right)}{4^n}} \\
&\overset{VOAL}{=} \frac{2\ln 2 + 0}{\ln 2 + 0} \cdot \frac{\ln 2 + 0}{4\ln 2 + 0} = \frac{1}{2} < 1,
\end{aligned}$$

tedy řada konverguje.