



## 4. cvičení - Řady - d'Alembert + Cauchy

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Teorie

**Věta 1** (nutná podmínka konvergence řady). Nechť řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje. Pak  $\lim a_n = 0$ .

**Věta 2** (Cauchyovo odmocninové kritérium). Nechť  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je řada s **nezápornými** členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.

(b) Je-li  $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.

(c) Je-li  $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.

(d) Je-li  $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje.

(e) Je-li  $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje.

**Věta 3** (d'Alembertovo podílové kritérium). Nechť  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je řada s **kladnými** členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.

(b) Je-li  $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.

(c) Je-li  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.

(d) Je-li  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , pak  $\lim a_n = \infty$ , a tedy řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje.

**Věta 4.** Nechť  $\{a_n\}$  je reálná posloupnost, jejíž všechny členy jsou **kladné**. Nechť dále platí, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Potom platí, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

**Věta 5.** Nechť  $a_n$  je **kladná** posloupnost. Nechť navíc existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak existuje i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

### Poznámka 6. Algoritmus:

1. Zkontrolujeme, že má řada nezáporné členy. Jinak vyšetřujeme absolutní konvergenci.
2. Vybereme si d'Alembertovo nebo Cauchyovo kritérium a spočteme příslušnou limitu.
  - (a) Obvykle nezáleží, které kritérium zvolíme. Výjimkou je situace, kdy řada obsahuje nulové členy - pak musíme zvolit Cauchyho. Druhou výjimkou je případ,  $\limsup > 1$ , který se vyskytuje pouze u Cauchyho.

- (b) Může se stát, že limita neexistuje, pak zkusíme variantu s lim sup nebo s nalezením  $q$ .
3. Podle limity ( $< 1$  nebo  $> 1$ ) uděláme závěr: Konverguje nebo Diverguje.
4. Varování: Pokud limita vyjde rovna 1, nevíme nic. Navíc pokud vyšla 1 v odmocninovém kritériu, vyjde 1 i v podílovém a naopak. Bude pak potřeba zvolit nějaké úplně jiné (nejspíš nutnou podmínku nebo (limitní) srovnávací).

### Hinty

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

### Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$	(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n + 3^n}$	(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n - 1}$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}}$	(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$	(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$	(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n}\right)^n$	(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{7}\right)^n$	(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$	(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

2. Vyšetřete konvergenci  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$$

### Zkouškové příklady

3. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + 1} z^n, \quad z \in \mathbb{R}.$	(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}$
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$	(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(2^{2^n} + 1)}{\ln(2^{4^n} + 1)}$

• (18) Věta 5. • • (18)  $\frac{1+\cos n}{2+\cos n} > \frac{3}{2}$  •