3. cvičení - Taylorův polynom + limity II

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$

   Řešení: Budeme rozvíjet do 3. řádu:
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),$$
   tedy máme
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6} + 0.$$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$

   Řešení: Budeme rozvíjet do 2. řádu:
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$
   a
$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$
   Dohromady
$$\ln(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)^2}{2} + o\left(\left(-\frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right)\right)^2\right)$$
   tedy
$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2!} + o(x^3).$$
   Pak
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2} \overset{VOAL}{=} -\frac{1}{2} + 0$$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x + 2x^3}{x^2} = 0$

   Řešení: Rozvineme do 3. řádu:
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$
   Pak
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + 2x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x + 2x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{11x^3}{6} + o(x^4)}{x^2} \overset{VOAL}{=} 0+0$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \sin(x\ln(1+x))}{x^2} = 1$

Řešení: Rozvineme do 2. řádu:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ x\ln(1+x) &= x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \end{aligned}$$

Navíc

$$\sin y = y + o(y^2).$$

Dohromady

$$\begin{aligned} \cos x \sin(x\ln(1+x)) &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + o\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)\right) \\ &= x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Celkem pak máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sin(x\ln(1+x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1.$$

$*$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) = -\dfrac{1}{4}$

Řešení:

Protože na rozvíjení v nekonečnu nemáme vztahy, provedeme substituci $y = \frac{1}{x}$ (výsledek pak dostaneme větou o limitě složené funkce).

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) \to \lim_{y\to 0+} y^{-3/2}\left(\sqrt{\frac{1}{y}+1} + \sqrt{\frac{1}{y}-1} - 2\sqrt{\frac{1}{y}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0+} y^{-2}\left(\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y} - 2\right).$$

Nyní rozvineme obě odmocniny do druhého řádu

$$= \lim_{y\to 0+} y^{-2}\left(\left(1 + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}y^2 + o(y^2)\right) + \left(1 - \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}y^2 + o(y^2)\right) - 2\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0+}\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + o(1)\right) = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{4}.$$

$*$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5} = \dfrac{1}{3}$

Řešení:

Provedeme substituci $y = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5} = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}} - x\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}} \to \lim_{y\to 0+} \frac{\sqrt[6]{1+y} - \sqrt[6]{1-y}}{y}.$$

Nyní rozvineme odmocniny v čitateli, stačí do prvního řádu

$$= \lim_{y\to 0+} \frac{(1+\frac{1}{6}y+o(y)-(1-\frac{1}{6}y+o(y))}{y} = \frac{1}{3} + \lim_{y\to 0+} \frac{o(y)}{y} = \frac{1}{3}+0 = \frac{1}{3}.$$

(g)

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{1/x} - \sqrt{x^6+1}\right]$$

Řešení: Provedeme substituci $y = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{1/x} - \sqrt{x^6+1}\right] = \lim_{y\to 0+} \frac{\left[\left(1-y+\frac{1}{2}y^2\right) e^y - \sqrt{1+y^6}\right]}{y^3} =$$

a nyní rozvineme exponencielu a odmocninu v čitateli do třetího řádu

$$= \lim_{y\to 0+} \frac{\left(1-y+\frac{1}{2}y^2\right)\left(1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3)\right) - 1 + o(y^6)}{y^3} =$$

$$= \lim_{y\to 0+} \frac{(1-y+\frac{1}{2}y^2) + (y-y^2+\frac{1}{2}y^3) + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) - 1}{y^3} =$$

$$= \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{y^3}{6}+o(y^3)}{y^3} = \frac{1}{6} + \lim_{y\to 0+} \frac{o(y^3)}{y^3} = \frac{1}{6}.$$

(h)

$$\lim_{x\to+\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

Řešení: Provedeme substituci $y = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{y\to 0+} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\ln(1+y)\right] =$$

a nyní rozvineme logaritmus do druhého řádu

$$= \lim_{y\to 0+} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\left(y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right)\right] =$$

$$= \lim_{y\to 0+} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} + o(1)\right] = \frac{1}{2}.$$

(i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

Řešení:

Budeme hledat rozvoj čitatele do třetího řádu. Je

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

odkud vyplývá

$$\sqrt{1+\operatorname{tg} x} = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\operatorname{tg}^2 x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}\operatorname{tg}^3 x + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

Na druhou stranu

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}\sin x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\sin^2 x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}\sin^3 x + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

odkud vyplývá, že

$$\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)x^3 + o(x^3) = \frac{1}{4}x^3 + o(x^3),$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \frac{1}{4}.$$

(j)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^-x)}{x^3}$$

Řešení: Zřejmě stačí rozvést čitatel do třetího řádu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^-x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2e^{2x} - (1 - \frac{1}{2}x^2e^{-2x}) + o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{-2x} - e^{2x}}{2x} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right) = -2 + 0 = -2.$$

(k)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)}$$

Řešení:

Protože platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2},$$

pak, existuje-li limita napravo, platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)} = \lim_{x\to 0} -4\frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{x^4} =$$

stačí tedy rozvést čitatel do čtvrtého stupně. Tak dostaneme

$$= \lim_{x\to 0} -4\frac{(1 + x^2 + 5x^4 + \frac{x^4}{2}) - (1 + x^2 - 3x^4 + \frac{x^4}{2}) + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} -4\frac{8x^4 + o(x^4)}{x^4} = -32.$$

(l)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(\operatorname{tg} x)-x}{x^3}$$

Řešení:
Čitatel musíme rozvést do třetího řádu. Platí, že

$$\sinh(\operatorname{tg} x)=\frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^{-\operatorname{tg} x}}{2}=\frac{1+\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{6}+o(x^3)-(1-\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{6}+o(x^3))}{2}=$$

$$=\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{6}+o(x^3)$$

dostáváme tak

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(\operatorname{tg} x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{6}-x+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{6}\frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=$$

A dále platí, že

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-x^3/3!+o(x^4)}{1-x^2/2+o(x^3)}=$$

$$=(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4))\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x^2}{2}+o(x^3))^k=$$

$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

a proto dostaneme, že

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{6}\frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{6}\frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+0=\frac{1}{2}.$$

(m) Najděte $a,b\in\mathbb{R}$ tak, aby $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^4}=0$.

Řešení:
Platí

$$x-a\sin x-b\sin x\cos x=x-a\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)-\frac{b}{2}\left(2x-\frac{(2x)^3}{6}+o(x^4)\right)=$$

$$=x-ax+\frac{ax^3}{6}-bx+\frac{4bx^3}{6}+o(x^4).$$

Aby limita byla nulová, musí být pro každé x z nějakého okolí nuly (a tedy všude)

$$x-ax-bx=0\implies 1-a-b=0$$

$$\frac{ax^3}{6}+\frac{4bx^3}{6}=0\implies a+4b=0$$

Odtud máme $a=-4b$ a $1+4b-b=0$, tedy $b=-\frac{1}{3}$ a $a=\frac{4}{3}$.

(n) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^x - 1}{x^n}$

Řešení:

Je $(1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$ a rozvoj je

$$e^{x\ln(1+x)} = e^{x(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))} = e^{x^2-x^3/2+o(x^3)} = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = 1 + x^2 + o(x^2),$$

tudíž

$$(1+x)^x - 1 = e^{x\ln(1+x)} - 1 = x^2 + o(x^2),$$

hledané n je rovno dvěma a platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1.$$

(o) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+\sin x) - \ln^2(1+\arcsin x)}{x^n}$

Řešení:

Porovnáme rozvoje funkcí $\sin x$ a $\arcsin x$ a zjistíme první člen, kde se liší. Ten bude určující.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Odtud vidíme, že pravděpodobně budeme muset rozvíjet do třetího řádu. Je

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3),$$

a proto

$$\ln(1+x\pm\frac{x^3}{6}+o(x^3)) = \left(x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) =$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

z čehož vyplývá, že

$$\ln^2(1+x\pm\frac{x^3}{6}+o(x^3)) = x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 \pm \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Není třeba pokračovat do vyšších mocnin, hledali jsme první člen, kde se rozvoje budou lišit. Odtud vyplývá

$$\ln^2(1+\sin x) - \ln^2(1+\arcsin x) = \ln^2(1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)) - \ln^2(1+x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)) =$$

$$= \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Odtud vyplývá, že hledané $n = 4$ a platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+\sin x) - \ln^2(1+\arcsin x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{2}{3}.$$

Zkouškové příklady

Zdroj: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/0809/ls/ma/index.html

2. (a) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x) = e^{x^2}\sin x - \sin(xe^{x^2})$ řádu 5 v bodě $x = 0$ a spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\ln(1+x^3) - \sin(x^2 \sin x)}$$

   (b) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x) = \cos(\sin x) - 1 - \sin(\cos x - 1)$ řádu 5 v bodě $x = 0$ a spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\ln(1+x)\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) - \sqrt{\cos(2x)} - x + \cos x}$$

   (c) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x) = \arctan(\sin x) - \sin\left(x - \frac{1}{3}x^2\right)$ řádu 5 v bodě $x = 0$ a spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(\arcsin x)(\cos x) - \arctan x}$$

   (d) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x) = (1 + \arcsin(x^2))^{2/3} - \sqrt{e^{(x^2)}} - \frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ řádu 5 v bodě $x = 0$ a spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(\sin x)(\sin 2x) - (\arcsin x)(\arcsin 2x)}$$

   (e) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(\sqrt{1+2x} - 1) - (1+4x)^{1/4} + \cos(x^4) - x^2$ řádu 4 v bodě $x = 0$ a spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\arcsin(\arctan x) - \sin x + x^3}$$

Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (2) LS 2008-09, 3. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Dostaneme postupně tyto Taylorovy rozvoje:

$$\exp(x^2) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5), \quad x \to 0, \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6), \quad x \to 0,$$

a proto

$$\exp(x^2)\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{2} + o(x^5) = x + \frac{5}{6}x^3 + \frac{41}{120}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.$$

Dále platí

$$\sin(xe^{x^2}) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^6) - \frac{1}{6}\left(x + x^3 + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x + o(x^2)\right)^5 + o((xe^{x^2})^5), \qquad x \to 0.$$

Platí $\lim_{x\to 0} xe^{x^2}/x = 1$ a můžeme tedy psát $o(x^5)$ místo $o((xe^{x^2})^5)$. Pak máme

$$\sin(xe^{x^2}) = x + \frac{5}{6}x^3 + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad x \to 0.$$

Dohromady:

$$\exp(x^2)\sin x - \sin(x\exp(x^2)) = \frac{x^5}{3} + o(x^5), \quad x \to 0,$$

a proto

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{x^5}{3}.$$

Rozvojem jmenovatele dostaneme

$$\log(1+x^3) - \sin(x^2\sin x) = x^3 + o(x^5) - \sin\left(x^3 - \frac{x^5}{6} + o(x^6)\right) = \frac{x^5}{6} + o(x^5), \quad x \to 0.$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2)\sin x - \sin(x\exp(x^2))}{\log(1+x^3) - \sin(x^2\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{3} + o(x^5)}{\frac{x^5}{6} + o(x^5)} = 2.$$

Příklad 2 : Použijeme dvakrát Dirichletovo a potom Abelovo kritérium:

- Posloupnost $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty; posloupnost $\frac{1}{n}$ konverguje k nule a je klesající. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \quad \text{konverguje.} \tag{1}$$

- Posloupnost $\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty; posloupnost $\frac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje k nule a je klesající. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \quad \text{konverguje.} \tag{2}$$

Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (5) LS 2008-09, 24. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Platí

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6), \qquad x \to 0,$$
$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0.$$

Odtud dostáváme

$$\cos(\sin x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0,$$
$$\sin(\cos x - 1) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0.$$

Tedy máme

$$\cos(\sin x) - 1 - \sin(\cos x - 1) = \frac{1}{6}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0,$$

a proto je

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{1}{6}x^4.$$

Jmenovatele je (za účelem spočtení limity) možno počítat pouze s Peanovým tvarem zbytku $o(x^4), x \to 0$, píšeme tedy

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4), \qquad x \to 0,$$
$$\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{54}x^4 + o(x^4), \qquad x \to 0,$$

odkud

$$\log(1+x) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4), \qquad x \to 0.$$

Dále dostaneme

$$\sqrt{\cos(2x)} = 1 - x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4), \qquad x \to 0,$$

a proto po úpravě

$$\log(1+x) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) - \sqrt{\cos(2x)} - x + \cos x = \frac{1}{8}x^4 + o(x^4), \qquad x \to 0.$$

Z výše uvedených rozvojů plyne

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\log(1+x) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) - \sqrt{\cos(2x)} - x + \cos x} = \frac{4}{3}.$$

Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (4) LS 2008-09, 17. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Platí

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0,\\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}(\sin x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{5}(x + o(x^2))^5 + o(\sin^5 x)\\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0.\end{aligned}$$

Dále máme

$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) &= x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^5 + o(x^5)\\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{40}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0.\end{aligned}$$

Pak dostáváme

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{1}{5}x^5.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0,\\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0.\end{aligned}$$

Pro jmenovatele dostáváme

$$(\arcsin x) \cdot (\cos x) - \operatorname{arctg} x = -\frac{1}{6}x^5 + o(x^5).$$

Z výše uvedených rozvojů plyne

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{(\arcsin x) \cdot (\cos x) - \operatorname{arctg} x} = -\frac{6}{5}.$$

Příklad 2 : Použijeme Dirichletovo a potom Abelovo kritérium:

- Víme, že posloupnost $\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty.
- Ukážeme, že posloupnost $\left\{\log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule a je rostoucí: pro $x > 0$ označme $f(x) := \log\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$; potom $f'(x) = \frac{2e^x}{e^{2x}-1} > 0$ (pro všechna $x > 0$). Posloupnost

Řešení

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Dostaneme postupně

$$1+\arcsin\left(x^2\right)=1+x^2+o\left(x^5\right), \qquad x\to 0,$$

$$\left(1+\arcsin\left(x^2\right)\right)^{2/3}=1+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o\left(x^5\right), \qquad x\to 0,$$

$$\sqrt{\mathrm{e}^{(x^2)}}=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o\left(x^5\right), \qquad x\to 0,$$

$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{6}x^2+o\left(x^5\right) .$$

Odtud dostáváme

$$\left(1+\arcsin\left(x^2\right)\right)^{2/3}-\sqrt{\mathrm{e}^{(x^2)}}-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{17}{72}x^4+o(x^5), \qquad x\to 0,$$

a tedy

$$T_5^{f,0}(x)=-\frac{17}{72}x^4.$$

Dále platí

$$\sin\left(x\right)\sin\left(2\,x\right)=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o\left(x^5\right)\right)\cdot\left(2\,x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+o\left(x^5\right)\right)=$$
$$=2\,x^2-\frac{5}{3}x^4+o(x^5), \qquad x\to 0,$$

$$\arcsin\left(x\right)\arcsin\left(2\,x\right)=\left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o\left(x^5\right)\right)\cdot\left(2\,x+\frac{4}{3}x^3+\frac{12}{5}x^5+o\left(x^5\right)\right)=$$
$$=2\,x^2+\frac{5}{3}x^4+o(x^5), \qquad x\to 0.$$

Pro jmenovatele proto dostáváme

$$(\sin x)(\sin 2x)-(\arcsin x)(\arcsin 2x)=-\frac{10}{3}x^4+o(x^5).$$

Z výše uvedených rozvojů plyne

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(\sin x)(\sin 2x)-(\arcsin x)(\arcsin 2x)}=\frac{17}{240}.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- rozvoj f .... 7 bodů
- rozvoj jmenovatele .... 6 bodů
- výpočet limity .... 2 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- chybný zápis Taylorova polynomu .... 3 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (7)
LS 2008-09, 16. 9. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Dostaneme postupně

$$\sqrt{1+2x}-1 = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{8}x^4+o(x^4), \qquad x\to 0,$$

$$\sin(\sqrt{1+2x}-1) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{8}x^4+o(x^4), \qquad x\to 0,$$

$$(1+4x)^{1/4} = 1+x-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x^3-\frac{77}{8}x^4+o(x^4), \qquad x\to 0,$$

$$\cos(x^4) = 1+o(x^4), \qquad x\to 0.$$

Odtud dostáváme

$$f(x) = -\frac{19}{6}x^3+\frac{37}{4}x^4+o(x^4), \qquad x\to 0,$$

a tedy

$$T_4^{f,0}(x) = -\frac{19}{6}x^3+\frac{37}{4}x^4.$$

Dále platí

$$\arcsin(\operatorname{arctg} x) = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3), \qquad x\to 0.$$

Pro jmenovatele proto dostáváme

$$\arcsin(\operatorname{arctg} x)-\sin(x)+x^3 = x^3+o(x^3), \qquad x\to 0.$$

Z výše uvedených rozvojů plyne

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x)-\sin(x)+x^3} = -\frac{19}{6}.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- rozvoj f .... 7 bodů
- rozvoj jmenovatele .... 6 bodů
- výpočet limity .... 2 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- chybný zápis Taylorova polynomu .... 3 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.
