



3. cvičení - Taylorův polynom + limity II

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + 2x^3}{x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin(x \ln(1+x))}{x^2}$

* e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$

* f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}$

* g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1} \right]$

* h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$

(m) Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (a + b \cos x) \sin x}{x^4} = 0$.

(n) Najděte takové $n \in \mathbb{N}$, aby limita byla konečná a různá od nuly. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^n}$

(o) Najděte takové $n \in \mathbb{N}$, aby limita byla konečná a různá od nuly.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + \sin x) - \ln^2(1 + \arcsin x)}{x^n}$$

Zkouškové příklady

Zdroj: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/0809/ls/ma/index.html>

2. (a) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x) = e^{x^2} \sin x - \sin(xe^{x^2})$ řádu 5 v bodě $x = 0$ a spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(1+x^3) - \sin(x^2 \sin x)}$$

- (b) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x) = \cos(\sin x) - 1 - \sin(\cos x - 1)$ řádu 5 v bodě $x = 0$ a spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(1+x) \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) - \sqrt{\cos(2x)} - x + \cos x}$$

- (c) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x) = \arctan(\sin x) - \sin\left(x - \frac{1}{3}x^2\right)$ řádu 5 v bodě $x = 0$ a spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(\arcsin x)(\cos x) - \arctan x}$$

- (d) Nalezněte Taylorův polynom funkce

$$f(x) = (1 + \arcsin(x^2))^{2/3} - \sqrt{e^{(x^2)}} - \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{2}x^2\right) \text{ řádu 5 v bodě } x = 0 \text{ a spočtěte}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(\sin x)(\sin 2x) - (\arcsin x)(\arcsin 2x)}$$

- (e) Nalezněte Taylorův polynom funkce

$$f(x) = \sin(\sqrt{1+2x}-1) - (1+4x)^{1/4} + \cos(x^4) - x^2 \text{ řádu 4 v bodě } x = 0 \text{ a spočtěte}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\arcsin(\arctan x) - \sin x + x^3}$$