2. cvičení - Taylorův polynom + limity

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

   Řešení: Taylorův rozvoj:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

   (Šlo by i provést dvakrát l'Hopitalovo pravidlo.)

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

   Řešení: Sledujte výpočet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - x - x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

   Řešení: Sledujte výpočet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o(x^5))}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4!} - \frac{1}{4}\frac{1}{2!} + o(x) = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + 0 = -\frac{1}{12}.$$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

   Řešení: Převedeme na společný jmenovatel a rozvineme funkci sinus v čitateli a uvidíme.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^3/3! + o(x^4) - x}{x \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{\sin x}\frac{x}{3!} + \frac{x^2}{x \sin x} o(x^2)\right) = -1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0.$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

Řešení: Čitatel musíme rozvést do pátého řádu. Platí, že

$$\sin(\sin x) = \sin(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)) =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^5 + o(x^6) =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) - \frac{1}{3!}\left(x^3 - 3x^2\frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6)$$

Odtud vyplývá

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6) - x(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^6))}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{+\frac{1}{10}x^5 + o(x^6) + \frac{1}{9}x^5 + o(x^6)}{x^5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = \frac{19}{90}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\arctan^3 x}$

Řešení: Předně provedeme jednoduchý trik. Platí, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$$

(jak plyne například ihned z l'Hopitalova pravidla). Proto, pokud existuje limita napravo, platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\arctan^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\arctan^3 x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3}.$$

Nyní zkusíme rozvinout čitatel do třetího řádu. Dostaneme

$$e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x = 1 + (x^2+x) + \frac{(x^2+x)^2}{2!} + \frac{(x^2+x)^3}{3!} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + 3\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) - 4 + o(x^3) =$$

$$= 2\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

Hledaná limita je tedy rovna

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3} = \frac{4}{3}.$$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x}$

Řešení: Podle základních limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

můžeme ihned psát (existuje-li limita napravo), že

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right)^2 \frac{\sin^4 x}{x^4}} \cdot \frac{1}{x^8} = \lim_{x\to 0} 4 \cdot \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{x^8} =$$

A nyní rozveďme čitatel.

$$e^{x^2} - 1 = 1 + x^2 - 1 + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \implies (\sin x - x)^2 = \frac{x^6}{36} + o(x^6)$$

a dohromady dostaneme

$$(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2 = \frac{x^8}{36} + o(x^8)$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{x\to 0} 4 \cdot \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{x^8} = \lim_{x\to 0} 4 \cdot \frac{\frac{1}{36}x^8 + o(x^8)}{x^8} = \frac{1}{9}.$$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$, $a > 0$

Řešení: Protože platí $a^x = e^{x \ln a}$, je

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \frac{x^2}{2!}\ln^2 a + o(x^2)$$

$$a^{-x} = e^{-x\ln a} = 1 - x\ln a + \frac{x^2}{2!}\ln^2 a + o(x^2)$$

a dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x\ln a + \frac{x^2}{2!}\ln^2 a + 1 - x\ln a + \frac{x^2}{2!}\ln^2 a - 2 + o(x^2)}{x^2} = \ln^2 a.$$

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$

Řešení: Funkci kotangens napíšeme ve tvaru podílu, převedeme na společný jmenovatel a zkusíme nějaký rozvoj.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} =$$

Jmenovatel se chová jako $x^2 \sin x \approx x^3$, takže zkusíme čitatel rozvést do třetího řádu.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)) - x(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3))}{x^2 \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x + \frac{x^3}{2!} + o(x^4)}{x^2 \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} \frac{x}{\sin x} + \frac{x}{\sin x} o(x) \right) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

Řešení:

Jde okamžitě pomocí l'Hopitalova pravidla. Taylor ale také ihned dává

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{1 + 3 \cdot \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + 6 \cdot \frac{o(x^3}{x^3}} = 2 \cdot \frac{1 + 3 \cdot 0}{1 + 6 \cdot 0} = 2.$$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$

Řešení:

Protože

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x^2) - 1}{(-x^2)} = 1,$$

platí rovnost (existuje-li limita napravo)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{x \cdot (-x^2)^2} =$$

což, rozvineme-li čitatel do pátého řádu, dává

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - (x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5)) + x^3 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{4}.$$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2 \sin x - \operatorname{arctan} x - x}$

Řešení: Například z definice Taylorova polynomu můžeme odvodit, že platí

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\operatorname{arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

Odtud dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 \arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2 \sin x - \operatorname{arctan} x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) - x + o(x^6)}{2\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) - x + o(x^6)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{20}x^5 - \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)}{\frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{-11}{60}} = -\frac{1}{11}.$$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

Řešení: Čitatel musíme rozvést do třetího řádu. Platí, že

$$(\cos x)^{\sin x}=e^{\sin x\ln(\cos x)}=e^{(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3))\cdot(\ln(1-x^2/2+o(x^3))}=$$

$$=e^{(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3))\cdot(-x^2/2+o(x^3))}=e^{-x^3/2+o(x^3)}=1-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

a tudíž

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^3/2+o(x^3))}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Odhady

2. Pomoci Taylorova polynomu 1. stupně určete přibližné hodnoty následujících výrazů (a porovnejte s kalkulačkou)

   (a) $\sqrt[3]{e}$

   (b) $\arcsin 0,2$

   (c) $(1,04)^4$

   (d) $\ln(1,02)$

   (e) $\arctan 1,1$

   (f) $\sin(-0,22)$

   Některé příklady máme odsud: Sbírka z mat. analýzy Zemánek Hasil:

   https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html

3. Vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než $0,001$.

4. Pro jaké hodnoty platí přibližný vztah $\cos x=1-\frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?

5. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu $(0,9;1,1)$ funkci $\arctan x$ Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě $x_0=1$.

6. Pomocí Taylorova polynomu pro $n=3$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt[3]{30}$.

7. Určete hodnotu $\cos 1^\circ$ pomocí Taylora 3. stupně.

2, (a) $\sqrt[3]{e} = e^{1/3}$

$= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

kalkulačka : 1,39561

(b) arcsin 0,2

$= 0,2$

kalk : 0,201

(c) $(1,04)^4 = (1 + 0,04)^4$

$= 1 + 4 \cdot 0,04 = 1,16$

k : 1,1699

(d) $\ln(1,02) = \ln(1 + 0,02)$

$= x = 0,02$

k : 0,01980

(e) arctan (1,1)

$= \text{"} x \text{"} \to 1,1$

k : 0,83298

pro rozvoj v $a = 1$

$f(1) = \frac{\pi}{4}$ $\quad f' = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad f'(1) = \frac{1}{2}$

$T_1^{f,1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1)$

$\to \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot (0,1) = \frac{\pi}{4} + 0,05 \doteq \frac{3,14}{4} + 0,05 = \underline{\underline{0,835}}$

(f) sin (−0,22)

$= -0,22$

kalk. −0,2182

3

(308) Užitím Maclaurinova polynomu vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než 0,001.

Řešení:

Z Příkladu 305 víme, že platí

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

což pro $x = 1$ dává

$$e = 1 + x + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!},$$

kde $\xi \in (0,1)$. K tomu, abychom dosáhli chyby menší než 0,001, musíme vyřešit nerovnici

$$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < 0{,}0001 \;\Big|\; \text{protože } \xi \in (0,1) \;\Big|\; \Rightarrow \quad \frac{3}{(n+1)!} < 0{,}0001 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3000 < (n+1)! \quad \Rightarrow \quad n > 5.$$

Proto musíme použít Taylorův polynom alespoň šestého stupně, tj.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2{,}718055556.$$

4 (309) Pro jaké hodnoty x platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností 0,0001?

Řešení:

Z Příkladu 307 pro $n = 2$ víme, že platí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + R_2(x),$$

kde $R_2(x) = \frac{x^4 \cos\xi}{4!}$ a ξ leží mezi 0 a x. Z omezenosti funkce $\cos x$ plyne, že

$$\left|\frac{x^4 \cos\xi}{24}\right| \le \frac{|\cos\xi|\, x^4}{24} \le \frac{x^4}{24}.$$

Musíme proto vyřešit nerovnici

$$\frac{x^4}{24} \le 0{,}0001 \quad \Rightarrow \quad x^4 \le 0{,}00\overset{24}{\cancel{01}}.$$

Řešením tedy je $x \in [-\sqrt[4]{0{,}0024}, \sqrt[4]{0{,}0024}] \doteq [-0{,}222, 0{,}222]$, tj. $|x| \le 0{,}222 = 12°30'$.

51

(303) Určete maximální chybu v aproximaci z Příkladu 302, kde $x \in (0,9;1,1)$.

Řešení:

Chyba je určena výrazem

$$R_2(x) = \frac{6\xi^2 - 2}{6(\xi^2+1)^3}(x-1)^3, \quad 0,9 < \xi < 1,1.$$

Musíme tedy vhodně omezit výraz $|R_2(x)|$ a tak určit maximální chybu aproximace. Nejdříve se zaměříme na čitatele, tj.

$$|6\xi^2 - 2| \; \big|\, |a+b| \le |a| + |b| \,\big| \; \le 6|\xi|^2 + 2 < 6 \cdot 1,1^2 + 2 = 9,26.$$

Jmenovatele omezíme takto

$$|6(\xi^2+1)^3| = 6\left(\xi^2+1\right)^3 \ge 10,86, \quad \text{neboť jistě platí } \xi^2 + 1 > 0,9^2 + 1 = 1,81.$$

Proto nyní můžeme psát

$$|R_2(x)| = \left|\frac{6\xi^2 - 2}{6(\xi^2+1)^3}\right| |(x-1)|^3 \le \frac{9,26}{10,86}|(x-1)|^3 \le 0,8526 \cdot 0,1^3 = 0,00085 \doteq 0,0009.$$

Maximální chyba aproximace Taylorovým polynomem druhého stupně je $0,0009$.

6 (310) Pomocí Taylorova polynomu pro $n = 3$ určete přibližně $\sqrt[3]{30}$.

Řešení:

Uvažujme funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a položme $x_0 = 27$. Vypočteme funkční hodnotu a všechny potřebné derivace v bodě x_0, tj.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[3]{x} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} 3,\\
f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} \frac{1}{27},\\
f''(x) &= -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} -\frac{2}{2187},\\
f'''(x) &= \frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} \frac{10}{177147}.
\end{aligned}
$$

Nyní můžeme vypočítat přibližnou hodnotu

$$
\sqrt[3]{30} = 3 + \frac{1}{27}\cdot 3 + \frac{-\frac{8}{2187}}{2}\cdot 3^2 + \frac{\frac{10}{177147}}{6}\cdot 3^3 \doteq \underline{3,10725}.
$$

7

(311) Pomocí Maclaurinova mnohočlenu třetího stupně, vyjádřete hodnotu $\cos 1^\circ$ (výsledek uveďte na 6 desetinných míst).

Řešení:

Z Příkladu 307 víme, že platí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2},$$

proto obdržíme

$$\cos 1^\circ = \cos\frac{\pi}{180} = 1 - \frac{\frac{\pi^2}{180^2}}{2} \doteq 0,999847.$$

Bonus

8. Určete, zda je pravda: Má - li funkce derivace všech řádů a Taylorova řada konverguje, tak už konverguje k původní funkci.

   Řešení: Nikoli. Uvažujme funkci

   $$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

   Pak $T_n^{f,0} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tedy Taylorův polynom aproximuje funkci pouze v 0.

9. Zjistěte, pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + Cx^4$ lokální maximum v bodě 0.

10. Zjistěte, zda je 0 inflexním bodem funkce $\sin x + \sinh x$.

kde φ je funkce splňující $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = 0$. Položme

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \quad c_n = \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \varphi(b_n), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Protože $b_n \in (-1, 1)$ pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, platí

$$\log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = b_n + c_n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Řada $\sum b_n$ konverguje pro každé $\alpha \in (0, \infty)$ podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). Dále díky Větě 4.2.16 platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\varphi(b_n)}{b_n^2}\right) = 1.$$

Tedy dle Věty 3.2.5 a řada $\sum c_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$. To ale nastane právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$ (viz Věta 3.2.18).

Platí tedy $\sum a_n = \sum (b_n + c_n)$, přičež $\sum b_n$ vždy konverguje a $\sum c_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$. Řada $\sum a_n$ tedy konverguje právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$.

♣

9 **6.4.12. Příklad.** Zjistěte pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce

$$f(x) = \cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + Cx^4, \quad x \in \mathbb{R},$$

lokální maximum v bodě 0.

Řešení. Symbol o uvažujeme pro $x \to 0$. Díky 6.2.3 a 6.2.1 máme

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \quad \text{a}$$
$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + o(x^6).$$

Tedy

$$f(x) = x^4\left(\frac{12C - 1}{12}\right) + x^6\left(\frac{14}{6!}\right) + o(x^6).$$

Označme $c = \frac{12C-1}{12}$. Je-li $C > \frac{1}{12}$, tj. $c > 0$, máme

$$f(x) = x^4\left(c + \frac{14}{6!}x^2 + o(x^2)\right).$$

Protože $\lim_{x\to 0} \left(c + \frac{14}{6!}x^2 + o(x^2)\right) = c$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\frac{f(x)}{x^4} > \frac{c}{2}, \quad x \in P(0, \delta).$$

Tedy $f(x) > 0$ pro $x \in P(0,\delta)$. Jelikož $f(0) = 0$, má v tomto případě funkce f v bodě 0 lokální minimum.

Obdobně odvodíme, že pro $C < \frac{1}{12}$ má f v 0 lokální maximum.

Je-li $C = \frac{1}{12}$, dostáváme

$$f(x) = \frac{14}{6!}x^6 + o(x^6) = x^6\left(\frac{14}{6!} + o(1)\right).$$

Zcela analogickou úvahou jako výše obdržíme, že f má v 0 lokální minimum. ♣

10 **6.4.13. Příklad.** Zjistěte, zdali je 0 inflexním bodem funkce

$$f(x) = \sin x + \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Během výpočtu budeme symbol o používat pro $x \to 0$. Pro funkci platí

$$f''(x) = (\cos x + \cosh x)' = -\sin x + \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Plat9 tedy $f''(0) = 0$. Jelikož $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, máme díky 6.2.1 a 6.2.2 vztahy

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),\\
\sinh x &= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{n=0}^{5}\frac{x^n}{n!} + o(x^5)\right) - \left(\sum_{n=0}^{5}\frac{(-x)^n}{n!} + o(x^5)\right)\right)\\
&= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$f''(x) = 2\frac{x^3}{3!} + o(x^5) = x^3(2 + o(x^2)).$$

Z tohoto vztahu dostáváme $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x^3} = 2$, a tedy existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $\frac{f''(x)}{x^3} > 1$ pro $x \in P(0,\delta)$. Platí tedy, že $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\delta, 0)$ a $f''(x) > 0$ pro $x \in (0,\delta)$. Podle Věty 5.5.19 má f v bodě 0 inflexní bod. ♣