



2. cvičení - Taylorův polynom + limity

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Lagrangeův tvar zbytku). Nechť f je reálná funkce, $a < x$. Nechť f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n + 1)$ -derivaci. Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3 \cos x - 4}{\arctan^3 x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}, a > 0$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cotg x \right)$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x - x}{x - \sin x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x - \tg x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x - \tg x - x}{2 \sin x - \arctan x - x}$

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

Odhady

2. Pomocí Taylorova polynomu 1. stupně určete přibližné hodnoty následujících výrazů (a porovnejte s kalkulačkou)

(a) $\sqrt[3]{e}$

(c) $(1,04)^4$

(e) $\arctan 1,1$

(b) $\arcsin 0,2$

(d) $\ln(1,02)$

(f) $\sin(-0,22)$

3. Vypočítejte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než 0,001.

4. Pro jaké hodnoty platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností 0,0001?

5. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu $(0,9; 1,1)$ funkci $\arctan x$ Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě $x_0 = 1$.

6. Pomocí Taylorova polynomu pro $n = 3$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt[3]{30}$.

7. Určete hodnotu $\cos 1^\circ$ pomocí Taylora 3. stupně.

Bonus

8. Určete, zda je pravda: Má - li funkce derivace všech řádů a Taylorova řada konverguje, tak už konverguje k původní funkci.
9. Zjistěte, pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + Cx^4$ lokální maximum v bodě 0.
10. Zjistěte, zda je 0 inflexním bodem funkce $\sin x + \sinh x$.