



1. cvičení - Taylorův polynom

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Necht f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazveme *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a* .

Věta 2 (Lagrangeův tvar zbytku). Necht f je reálná funkce, $a < x$. Necht f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$ -derivaci. Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Definice 3. Necht f, g jsou reálné funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a malé o g (značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$), pokud $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Speciálně, zápis

$$f(x) = o(x^n)$$

značí, pokud $f \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí nuly, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Věta 4 (Vlastnosti o). Necht $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Jestliže $f_1(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$, a $f_2(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$, pak

$$(f_1 \pm f_2)(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a.$$

2. Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x))$, $x \rightarrow a$, a $f_2(x) = o(g_2(x))$, $x \rightarrow a$, pak

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = o((g_1 \cdot g_2)(x)), \quad x \rightarrow a.$$

3. Jestliže $f(x) = o(g_1(x))$, $x \rightarrow a$, a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{R}$, pak

$$f(x) = o(g_2(x)), \quad x \rightarrow a.$$

4. Jestliže $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$ a h je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a , pak

$$(h \cdot f)(x) = o(g(x)h(x)), \quad x \rightarrow a.$$

5. Jestliže $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a , pak

$$(h \cdot f)(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a.$$

6. Je-li $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$, a $f(x) = o((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$, potom

$$f(x) = o((x-a)^m), \quad x \rightarrow a.$$

Věta 5. Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, necht' φ je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a a necht' f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí bodu b . Necht' $f(y) = o(g(y))$, $y \rightarrow b$ a $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$. Necht' dále existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : \varphi(x) \neq b.$$

Pak

$$f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))), \quad x \rightarrow a.$$

Poznámka 6. 1. Výraz $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme *zbytkem po Taylorově polynomu řádu n* .

2. Peanova věta tedy říká, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x - a)^n)$, $x \rightarrow a$.

Hinty

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

Rozvoj z definice

1. Zderivujeme funkci až do n -tého stupně.
2. Dosadíme bod a - získáme koeficienty.
3. Sestavíme Taylorův polynom.

Příklady

Z definice

1. Rozviňte funkci $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ v bodě $a = 4$.

Jak vypadá Taylorův polynom polynomu?

2. Najděte Taylorův polynom 3. stupně v 0 (není-li řečeno jinak)

$$(a) \ e^{-x} \quad (b) \ \sqrt{1+x} \quad (c) \ \ln x, \ a = 1 \quad (d) \ \arctan x \quad (e) \ \frac{1}{1-x}$$

3. Odvoďte rozvoje pro následující funkce do n -tého řádu v $a = 0$.

$$(a) \ e^x \quad (b) \ \sin x \quad (c) \ \cos x \quad (d) \ \ln(1+x)$$

4. Najděte Taylorovy polynomy:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| (a) $\sqrt{x}$, v 1 do 5. stupně | (d) $x^2 e^x$, v 0 |
| (b) $\cos \frac{x\pi}{2}$, v 1, do 9. stupně | (e) $x \ln x$, v 1, do 4. stupně |
| (c) $\frac{1-x}{1+x}$, v 0, do 7. stupně | (f) $\frac{1}{x}$, v 3, do 5. stupně |

5. Vyjádřete funkci $\sin \frac{x\pi}{4}$ pomocí mocnin $x - 2$.

Použitím vět

6. Odvoďte Taylorův rozvoj funkce v $x_0 = 0$ do m -tého řádu

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x) = e^{2x-x^2}$, $m = 5$. | |
| (b) $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$, $m = 3$. | |
| (c) $\heartsuit f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $m = 4$. | |
| (d) $\heartsuit f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$, $m = 2$. | |
| (e) $\heartsuit f(x) = \ln(\cos x)$, $m = 6$. | (i) $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, $m = 6$. |
| (f) $f(x) = \sin(\sin x)$, $m = 3$. | (j) $\heartsuit f(x) = \operatorname{tg} x$, $m = 5$. |
| (g) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$, $m = 13$. | (k) $f(x) = e^{-x^2} \arcsin x$, $m = 5$. |
| (h) $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, $m = 4$. | (l) $\frac{1}{3-2x}$, $m = \infty$. |

Bonus

7. Víte-li, že Taylorův polynom funkce f je $T_3^{f,0} = 2 - x - x^2/3 + 2x^3$, určete hodnoty

- | | | | |
|------------|-------------|--------------|---------------|
| (a) $f(0)$ | (b) $f'(0)$ | (c) $f''(0)$ | (d) $f'''(0)$ |
|------------|-------------|--------------|---------------|

8. Víte-li, že Taylorova řada $\cos x$ v 0 je $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, jak je na tom $\frac{1}{2} \cos(2x)$?

- | | | | |
|--|--|---|---------------------------------------|
| A $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ | B $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48}$ | C $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ | D $\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3}$ |
|--|--|---|---------------------------------------|

9. Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = T_2^{g,0}$, pak $f = g$?

10. Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = 1 + x - x^2$, pak je f konkávní na okolí 0?

11. Který Taylorův polynom bude vhodný k aproximaci hodnoty $\sin 3$, nemáte-li kalkulačku?

- | | |
|---|--|
| A $x - \frac{1}{3}x^3$ | C $-(x - \pi) + \frac{1}{3!}(x - \pi)^3$ |
| B $1 - \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2$ | D $\sin(3) - \frac{1}{3!}\sin(3)(x - 3)^3$ |

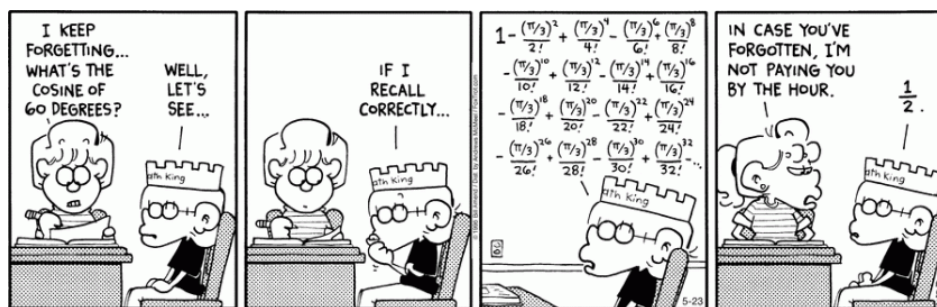


Figure 1: <https://www.gocomics.com/foxtrotclassics/2018/05/23>

- (6c) Užití geometrickou řadu a násobení.
- (6d) Užití geometrickou řadu, umocnění, vynásobení.
- (6e) Rozviněte a použijte geometrickou řadu.
- (6f) Metoda neurčitých koeficientů.