Matice ve výše uvedeném vzorci se liší pouze ve vyznačeném k-tém sloupci.

1

11.4.5. Příklad. Jsou dány vztahy

$$\exp(u/x)\cos(v/y) = \frac{x}{\sqrt{2}},$$
$$\exp(u/x)\sin(v/y) = \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu $[1,1,0,\frac{\pi}{4}]$ funkce $[x,y] \mapsto u(x,y)$, $[x,y] \mapsto v(x,y)$ třídy C^∞. Spočtěte parciální derivace u a v v bodě $[1,1]$.

Řešení. Definujme $F\colon \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$ jako $F = (F_1, F_2)$, kde

$$F_1(x,y,u,v) = \exp(u/x)\cos(v/y) - \frac{x}{\sqrt{2}},$$
$$F_2(x,y,u,v) = \exp(u/x)\sin(v/y) - \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Pak F je třídy C^∞ na $(0,\infty)\times(0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a $F(1,1,0,\frac{\pi}{4}) = [0,0]$. Dále máme

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,1,0,\frac{\pi}{4}]} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x}\exp(u/x)\cos(v/y) & -\frac{1}{y}\exp(u/x)\overset{\sin}{\cancel{\cos}}(v/y) \\ \frac{1}{x}\exp(u/x)\sin(v/y) & \frac{1}{y}\exp(u/x)\cos(v/y) \end{pmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,1,0,\frac{\pi}{4}]}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(1,1,0,\frac{\pi}{4}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(1,1,0,\frac{\pi}{4}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(1,1,0,\frac{\pi}{4}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(1,1,0,\frac{\pi}{4}) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Díky Větě 11.4.3 tedy existují na nějakém okolí U bodu $[1,1]$) funkce $u, v\colon U \to \mathbb{R}$ třídy C^∞ splňující

$$F_1(x,y,u(x,y),v(x,y)) = F_2(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0.$$

Derivováním těchto vztahů podle x dostáváme

$$\exp(u/x)\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot x - u}{x^2}\cos(v/y) + \exp(u/x)(-\sin(v/y)\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$
$$\exp(u/x)\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot x - u}{x^2}\sin(v/y) + \exp(u/x)\cos(v/y)\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial x}) = 0.$$

Dosazením $x = y = 1$, $u(1,1) = 0$ a $v(1,1) = \frac{\pi}{4}$ dostaneme soustavu

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = 0,$$

jejímž řešením je

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{2}.$$

Výpočet parciálních derivací $\frac{\partial u}{\partial y}(1,1)$ a $\frac{\partial v}{\partial y}(1,1)$ by proběhl obdobně. ♣

11.5. Lokální extrémy funkce více proměnných

11.5.1. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$, $a \in M$ a f je funkce z P do $\mathbb{R}$ splňující $M \subset D(f)$. Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **maxima** (**minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall x \in M: \ f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **lokálního maxima** (**lokálního minima**) **na** M, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in B(a,\delta) \cap M: \ f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **ostrého lokálního maxima** (**ostrého lokálního minima**) **na** M, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in (B(a,\delta) \cap M) \setminus \{a\}: \ f(x) < f(a) \quad (f(x) > f(a)).$$

11.5.2. Poznámka. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$, $h \in \mathbb{R}^n$, $f: G \to \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Nalezneme $\delta > 0$ splňující $a + th \in G$ pro $|t| < \delta$ a definujeme funkci $g: (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(a+th)$. Potom $g'(0) = f'(a)(h)$ a $g''(0) = f''(a)(h,h)$.

11.5.3. Věta (nutná podmínka existence lokálního extrému)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Nechť funkce $f: G \to \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Důkaz. Položme $g(t) = f(a + te^j)$. Pak má g v bodě 0 lokální extrém, a tedy $g'(0)$ buď neexistuje nebo je rovna 0. Odtud plyne tvrzení. ■

11.5.4. Věta (elipticita positivně definitiní kvadratické formy)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je positivně definitní kvadratická forma. Potom

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n: \ Q(h) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

Důkaz. Jest

$$Q(h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

pro vhodná $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a tedy je zobrazení Q spojité na $\mathbb{R}^n$. Označme

$$S = \{h \in \mathbb{R}^n; \ \|h\| = 1\}$$

a

$$\varepsilon = \inf\{Q(h); \ h \in S\}.$$

Řešení. (a) Nechť $[x, y, z]$ splňuje rovnici $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$. Pokud $y = 0$, $z = x$ a pravá strana rovnosti není definována. Tedy $y \neq 0$. Jelikož $z - x = arctg \frac{y}{z-x}$, je $z - x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Proto

$$y = (z - x) \operatorname{tg}(z - x) > 0$$

(funkce $u \operatorname{tg} u$ je kladná na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$).

Derivujeme-li rovnost $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$ podle x, dostáváme

$$z_x = 1 - \frac{y(z_x - 1)}{(z - x)^2 + y^2}.$$

Úpravou obdržíme

$$z_x((z - x)^2 + y^2 + y) = (z - x)^2 + y^2 + y,$$

tj. $z_x = 1$ (díky předchozím úvahám víme, že $(z - x)^2 + y^2 + y > 0$).

(b) Nechť $[a, b] \in \mathbb{R}^2$ splňující $b > 0$ je dáno. Uvažujme funkci $f(z) = -z + a + \operatorname{arctg} \frac{b}{z-a}$. Pak f je spojitá na (a, ∞) a splňuje $\lim_{z \to a+} f(z) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{z \to \infty} f(z) = -\infty$. Existuje tedy $c \in (a, \infty)$ splňující $f(c) = 0$. Uvažujme nyní bod $[a, b, c]$ a funkci $F(x, y, z) = -z + x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$. Pak $F(a, b, c) = 0$, F je třídy C^∞ na nějakém okolí $[a, b, c]$ a

$$\frac{\partial F}{\partial z}([a, b, c]) = -1 - \frac{b}{(c - a)^2 + b^2} < 0.$$

Dle Věty 11.4.1 existuje požadované okolí bodu $[a, b, c]$ a příslušná funkce z. ♣

2

11.8.32. Příklad. Ukažte, že existují funkce $u = u(x, y)$ a $v(x, u)$ definované na nějakém okolí U bodu $[1, 2]$, které jsou na U třídy C^1, splňují $u(1, 2) = 0$, $v(1, 2) = 0$ a platí pro ně rovnice

$$xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1 + v} = 2x.$$

Dále vypočtěte $u'(1, 2)$ a $v'(1, 2)$.

Řešení. Uvažujme bod $a = [1, 2, 0, 0]$ a funkci

$$F : [x, y, u, v] \mapsto \left[xe^{u+v} + 2uv - 2, ye^{u-v} - \frac{u}{1 + v} - 2x \right].$$

Pak $F(a) = 0$, F je třídy C^∞ na nějakém okolí a a platí

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(a) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,2,0,0]} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3. \end{aligned}$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 11.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[1, 2]$ a V obsahující $[0, 0]$ takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y = \varphi(x) \in$

V splňující $F(x,y) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x,y)$ a $v(x,y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U.

Derivujeme-li nyní vztahy

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv - 2 &= 0 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x &= 0 \end{aligned} \tag{11.32}$$

podle x, dostáváme

$$\begin{aligned} e^{u+v} + xe^{u+v}(u_x + v_x) + 2u_x v + 2uv_x &= 0 \\ ye^{u-v}(u_x - v_x) - \frac{1}{(1+v)^2}(u_x(1+v) - uv_x) &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení $[x,y,u,v] = [1,2,0,0]$ máme systém

$$\begin{aligned} u_x + v_x &= -1 \\ u_x - 2v_x &= 2, \end{aligned}$$

jehož řešením je $u_x(1,2) = 0$ a $v_x(1,2) = -1$.

Zderivováním (11.32) podle y dostaneme

$$\begin{aligned} xe^{u+v}(u_y + v_y) + 2u_y v + 2uv_y &= 0 \\ e^{u-v} + ye^{u-v}(u_y - v_y) - \frac{1}{(1+v)^2}\big(u_y(1+v) - uv_y\big) &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení máme rovnice

$$\begin{aligned} u_y + v_y &= 0 \\ y_y - 2v_y &= -1. \end{aligned}$$

Řešení je $u_y(1,2) = -\frac{1}{3}$ a $v_y(1,2) = \frac{1}{3}$.

Proto $u'(1,2) = [0, -\frac{1}{3}]$ a $v'(1,2) = [-1, \frac{1}{3}]$. ♣

3

11.8.33. Příklad. Dokažte, že existují funkce $z(x,y)$, $t(x,y)$, které jsou třídy C^∞ na nějakém okolí U obsahujícím $[1,-1]$ a splňují rovnice

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0, \quad x + y + z - t - 2 = 0,$$

spolu se vztahy $z(1,-1) = 2$, $t(1,-1) = 0$.

Spočtěte $z''(1,-1)$.

Řešení. Uvažujme bod $a = [1,-1,2,0]$ a funkci

$$F: [x,y,z,t] \mapsto \left[x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3, x + y + z - t - 2\right].$$

Pak $F(a) = 0$, F je třídy C^∞ na$\mathbb{R}^4$ a platí

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial t}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial t}(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z & -3t^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}_{[x,y,z,t]=[1,-1,2,0]} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 11.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[1,-1]$ a V obsahující $[2,0]$ takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y = \varphi(x) \in V$ splňující $F(x,y) = 0$. Označíme-li složky φ jako $z(x,y)$ a $t(x,y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U.

Derivujeme-li nyní rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 &= 0 \\ x + y + z - t - 2 &= 0 \end{aligned}$$

podle x, máme

$$\begin{aligned} 2x - zz_x - 3t^2 t_x &= 0 \\ 1 + z_x - t_x &= 0. \end{aligned} \tag{11.33}$$

Po dosazení $[x,y,z,t] = [1,-1,2,0]$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} -2z_z &= 0 \\ z_x - t_x &= -1, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $z_x(1,-1) = 1$ a $t_x(1,-1) = 2$.

Zderivováním podle y dostáváme

$$\begin{aligned} 2y - zz_y - 3t^2 t_y &= 0 \\ 1 + z_y - t_y &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení obdržíme $z_y(1,-1) = -1$, $t_y(1,-1) = 0$.

Obdržené vztahy znovu zderivujeme podle x, y a (11.33) podle y a dostaneme

$$\begin{aligned} 2 - (z_x)^2 - zz_{xx} - 6t(t_x)^2 - 3t^2 t_{xx} &= 0 \\ z_{xx} - t_{xx} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - (z_y)^2 - zz_{yy} - 6t(t_y)^2 - 3t^2 t_{yy} &= 0 \\ z_{yy} - t_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} -z_y z_x - zz_{xy} - 6tt_y t_x - 3t^2 t_{xy} &= 0 \\ z_{xy} - t_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení vyjde $z_{xx}(1,-1) = t_{xx}(1,-1) = \frac{1}{2}$, $z_{yy}(1,-1) = t_{yy}(1,-1) = \frac{1}{2}$ a $z_{xy}(1,-1) = t_{xy}(1,-1) = \frac{1}{2}$. Tedy

$$z''(1,-1)\colon [h_1, h_2] \mapsto \frac{1}{2}h_1^2 + h_1 h_2 + \frac{1}{2}h_2^2.$$

♣

4

11.8.34. Příklad. Ukažte, že rovnice

$$x = u + v^2, \quad y = u^2 - v^3$$

definují na jistém okolí bodu $[3,3]$ funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$ třídy C^∞, které splňují $u(3,3) = 2$, $v(3,3) = 1$. Spočtět $z_{xy}(3,3)$, pokud $z = 2uv$.

Řešení. Uvažujme bod $a = [3,3,2,1]$ a funkci

$$F\colon [x,y,u,v] \mapsto \left[x - y - v^2, y - u^2 + v^3\right].$$

Pak $F(a) = 0$, F je třídy C^∞ na$\mathbb{R}^4$ a platí

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2v \\ -2u & 3v^2 \end{vmatrix}_{[x,y,u,v]=[3,3,2,1]}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -11.$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 11.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[3,3]$ a V obsahující $[2,1]$ takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y = \varphi(x) \in V$ splňující $F(x,y) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x,y)$ a $v(x,y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U.

Vzhledem k tomu, že

$$z_{xy} = 2\left(u_{xy}v + u_x v_y + u_y v_x + u v_{xy}\right), \tag{11.34}$$

potřebujeme vypočítat jednotlivé derivace u a v. K tomuto účelu derivujeme rovnice

$$\begin{aligned} u + v^2 &= x \\ u^2 - v^3 &= y \end{aligned}$$

podle x a podle y. Dostaneme tak systémy

$$\begin{aligned} u_x + 2v v_x &= 1 \\ 2u u_x - 3v^2 v_x &= 0 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} u_y + 2v v_y &= 0 \\ 2u u_y - 3v^2 v_y &= 1. \end{aligned}$$

Po dosazení máme

$$u_x(3,3) = \frac{3}{11}, v_x(3,3) = \frac{4}{11}, u_y(3,3) = \frac{2}{11}, v_y(3,3) = -\frac{1}{11}.$$

Dalším derivováním obdržíme soustavu

$$u_{yx} + 2v_x v_y + 2vv_{yx} = 0$$
$$2u_x u_y + 2uu_{yx} - 6vv_x v_y - 3v^2 v_{yx} = 0,$$

jejímž řešením po dosazení je

$$u_{yx}(3,3) = \frac{224}{11^3}, \quad v_{yx}(3,3) = -\frac{68}{11^3}.$$

Díky záměnnosti parciálních derivací můžeme dosadit do (11.34) a obdržet $z_{xy}(3,3) = \frac{26}{121}$. ♣

11.8.35. Příklad. Nechť C^1-funkce $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňuje rovnici

$$xu_y - yu_x = 0.$$

Zjistěte, jakou rovnici splňuje na $\mathbb{R}^2$ funkce $u^*(r,\alpha) = u(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, $(r,\alpha) \in \mathbb{R}^2$. Výsledek použijte k nalezení nějakého nekonstantního řešení původní rovnice.

Řešení. Pomocí Věty 11.2.18 máme

$$u_r^* = u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha$$
$$u_\alpha^* = u_x(-r\sin\alpha) + u_y(r\cos\alpha).$$

Vyjádříme u_x a u_y a dostáváme

$$-ru_x = -r\cos\alpha u_r^* + \sin\alpha u_\alpha^*$$
$$ru_y = r\sin\alpha u_r^* + \cos\alpha u_\alpha^*.$$

Pro $r \neq 0$ tak platí

$$-u_x = -\cos\alpha u_r^* + \frac{1}{r}\sin\alpha u_\alpha^*$$
$$u_y = \sin\alpha u_r^* + \frac{1}{r}\cos\alpha u_\alpha^*.$$

Tedy pro $r \neq 0$ platí

$$0 = xu_y - yu_x = r\cos\alpha u_x - r\sin\alpha u_y = ru_\alpha^*.$$

Tedy $u_\alpha^* = 0$ na $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$. Jelikož je u^* třídy C^1, plat9 tato rovnost na $\mathbb{R}^2$.

Nyní stačí zvolit funkci nezvislou na α, například $u^*(r,\alpha) = r^2$. Pak $u(x,y) = x^2 + y^2$, $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, je nekonstantní řešení zadané rovnice.

♣

11.8.36. Příklad. Nechť C^2-funkce $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňuje Laplaceovu rovnici

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Zjistěte, jakou rovnici splňuje funkce $u^*(r,\alpha) = u(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ na množině $(0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Řešení:

1. Označme $F(x,y) := x^3+y^3-2xy$ a $A := [1,1]$. Existence a hladkost zadané funkce plyne z Věty 1 – podmínky ověříme výpočtem.

   Prvně si uvědomíme, že $F(A) = 0$. Následně derivujeme:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 2x.$$

   Po dosazení dostáváme $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 1 \neq 0$, a tedy jsou předpoklady Věty 1 splněny. Dále $\frac{\partial F}{\partial x}(A) = 1$.

   Pro výpočet první derivace funkce y můžeme dosadit do vzorce z věty, tedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x}(x) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))} = \\ &= -\frac{3x^2-2y(x)}{3y^2(x)-2x}.\end{aligned}$$

   Po dosazení dostaneme $\mathbf{y_x(1) = y'(1) = -1}$. Pro výpočet druhé derivace musíme derivovat:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x) = -\frac{(6x-2y_x(x))(3y^2(x)-2x)-(3x^2-2y(x))(6y(x)y_x(x)-2)}{(3y^2(x)-2x)^2}.$$

   Po dosazení

$$\mathbf{y_{xx}(1)} = -\frac{(6+2)(3-2)-(3-2)(-6-2)}{(3-2)^2} = \mathbf{-16}.$$

5

2. První dvě rovnice již určují funkce $x(u,v)$ a $y(u,v)$ definované na nějakém okolí bodu $[5,-7]$ – viz Věta 2. Zderivujme první dvě rovnice podle v (budeme psát x místo $x(u,v)$ a x_v místo $\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)$, obdobně pro funkci y):

$$\begin{aligned}0 &= 2xx_v + 2yy_v,\\ 1 &= 2xx_v - 2x_vy^2 - 4xyy_v.\end{aligned}$$

   Dosadíme-li za x a y, dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ -6 & -8 & 1 \end{array}\right)$$

   Řešením je

$$\begin{aligned}\mathbf{x_v(5,-7)} &= -\mathbf{\frac{1}{2}},\\ \mathbf{y_v(5,-7)} &= \mathbf{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

Dobředefinovanost funkce z_v by plynula z Věty 2, kde bychom museli uvažovat soustavu tří funkcí o pěti proměnných. Nicméně na to se nás úloha neptá. Derivaci funkce z spočítáme pomocí řetízkového pravidla. Nechť $f(x,y) = \log(y^2 - x^2)$. Pak $z(x,y) = f(x(u,v), y(u,v))$ a

$$\begin{aligned} z_v(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \\ &= \frac{-2x}{y^2 - x^2} x_v + \frac{2y}{y^2 - x^2} y_v, \end{aligned}$$

kam dosadíme již známá čísla ($x = 1$, $y = 2$, $x_v = -\frac{1}{2}$ a $y_v = \frac{1}{4}$):

$$\mathbf{z_v(5,-7)} = \frac{-2}{4-1}\frac{-1}{2} + \frac{4}{4-1}\frac{1}{4} = \mathbf{\frac{2}{3}}.$$

3. Zde máme soustavu dvou funkcí o 4 neznámých, což můžeme zapsat třeba takhle

$$F(x,y,z,t) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 \\ x + y + z - t - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chceme (samozřejmě) použít Větu 2. Triviálně $F[1,-1,2,0] = 0$, a funkce F je zřejmě hladká až na půdu (tj. $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$). Zbývá podmínka s determinantem. Počítejmež:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z}(1,-1,2,0) & \frac{\partial F_1}{\partial t}(1,-1,2,0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(1,-1,2,0) & \frac{\partial F_2}{\partial t}(1,-1,2,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z & -3t^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}_{z=2,\ t=0} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Tedy existence vhodných okolí a funkcí z a t je zaručena Větou 2. Navíc jsou tyto funkce nekonečně hladké.

Pro výpočet druhých derivací je nejjednodušší zderivovat zadané rovnice. Nejprve podle x. Pro jednoduchost značme $z = z(x,y)$ a $z_x = z_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$, obdobně pro t a jiné parciální derivace. Dostaneme

$$\begin{aligned} 2x - zz_x - 3t^2 t_x &= 0, \\ 1 + z_x - t_x &= 0. \end{aligned}$$

To je soustava lineárních rovnic, vyřešením dostaneme

$$z_x = \frac{2x - 3t^2}{3t^2 + z},$$

$$t_x = \frac{2x + z}{3t^2 + z}.$$

V zadaném bodě pak ($z(1,-1) = 2$ a $t(1,-1) = 0$)

$$z_x(1,-1) = 1,$$

$$t_x(1,-1) = 2.$$

Nás ale zajímají druhé derivace, tedy počítejme:

$$z_{xx} = \frac{(2 - 6tt_x)(3t^2 + z) - (2x - 3t^2)(6tt_x + z_x)}{(3t^2 + z)^2}$$

6

$u = \ln(xy) + \cos v$

$v = e^{x-u} - y^2 - v$

$[x, y, u, v] = [1, 1, 1, 0]$

hledáme $x(u, v)$, $y(u, v)$

$x(1,0) = 1$

$y(1,0) = 1$

(2)

$F_1 = \ln(xy) + \cos v - u$

$F_2 = e^{x-u} - y^2 - 2v$

$F_1(1,1,1,0) = 0 + 1 - 1 = 0$

$F_2 = e^0 - 1 - 2 \cdot 0 = 0$ ✓

(1) $F_1, F_2 \in C^k(G)$ $G = B_{1/2}(1,1,1,0)$

(3)

$\partial F_1 / \partial x$

$\frac{1}{xy} \cdot y$

$\partial F_1 / \partial y$

$\frac{1}{xy} x$

$\partial F_2 / \partial x$

e^{x-u}

$\partial F_2 / \partial y$

$\cancel{e^{x-u}} - 2y$

v bodě:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

(4) hledáme $\frac{\partial y}{\partial v}$ a $\frac{\partial y}{\partial u}$

der. rce dle v:

$$0 = \frac{1}{xy}\left(\frac{\partial x}{\partial v} \cdot y + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot x\right) + (-\sin v)$$

$$1 = e^{x-u}\left(\frac{\partial x}{\partial v} - 0\right) - 2y \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - 1$$

v bodě $x=1$ $y=1$ $u=1$ $v=0$ máme

$$0 = \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} \longrightarrow -\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$1 = \frac{\partial x}{\partial v} - 2\frac{\partial y}{\partial v} - 1 \longrightarrow 2 = \frac{3\,\partial x}{\partial v} \rightarrow \boxed{\frac{2}{3} = \frac{\partial x}{\partial v}}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{2}{3}}$$

analogicky dle u:

$$1 = \frac{1}{xy}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot y + x\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$0 = e^{x-u}\left(\frac{\partial x}{\partial u} - 1\right) - 2y\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

v bodě:

$$1 = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} \quad \to \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1 - \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial u} - 1 - 2\frac{\partial y}{\partial u} \qquad 1 = 1 - \frac{\partial y}{\partial u} - 2\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\to \boxed{\frac{\partial y}{\partial u} = 0} \quad \text{a} \quad \boxed{\frac{\partial x}{\partial u} = 1}$$

(5) diferenciál:

z věty máme, že $y(u,v)$ je C^∞ → tedy má spoj. p. 1. derivace

→ tedy má tot. dif. tvaru:

$$\boxed{D u(h_1, h_2) = 0\, h_1 - \tfrac{2}{3} h_2}$$

7)

$$u = \ln(x^2+y^2) - 2xy$$
$$v = e^x \sin y + \frac{1}{x^2}$$

$[x, y, u, v] = [1, 0, 0, 1]$

$x(u,v)$, $y(u,v)$

$$z(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$$
$$\phi(u,v) = z(x(u,v), y(u,v))$$
$$? \ \frac{\partial \phi}{\partial u}(0,1) = ?$$

(1) $F_1, F_2 \in C^\infty(G)$ $\quad G = B_{1/2}(1,0,0,1)$

$$F_1 = \ln(x^2+y^2) - 2xy - u$$
$$F_2 = e^x \sin y + 1/x^2 - v$$

(2) $F_1(1,0,0,1) = \ln 1 - 2\cdot 0 - 0 = 0$

$F_2 \qquad = e^1 \sin 0 + 1 - 1 = 0$

(3) $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ $\qquad \frac{\partial F_1}{\partial y}$

$\frac{2x}{x^2+y^2} - 2y \qquad \frac{2y}{x^2+y^2} - 2x$

$\frac{\partial F_2}{\partial x}$ $\qquad \frac{\partial F_2}{\partial y}$

$e^x \sin y - \frac{2}{x^3} \qquad e^x \cos y$

v bodě:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{1} - 2\cdot 0 & 0 - 2 \\ 0 - 2 & e^1 \cdot 1 \end{vmatrix} = 2e \neq 0$$

$\rightarrow$ z lefy máme $\exists$ $x(u,v)$ a $y(u,v)$

(4) der dle u:

$$1 = \frac{1}{x^2+y^2}\left(2x \frac{\partial x}{\partial u} + 2y \frac{\partial y}{\partial u}\right) - 2 \frac{\partial x}{\partial u} y - 2x \frac{\partial y}{\partial u}$$
$$0 = e^x \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \sin y + e^x \cos y \frac{\partial y}{\partial u} + (-2)\frac{1}{x^3} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}$$

v bodě:

$$1 = 2\frac{\partial x}{\partial u} - 2\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$0 = e\frac{\partial y}{\partial u} - 2\frac{\partial x}{\partial u}$$

$+$

$$1 = e\frac{\partial y}{\partial u} - 2\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\boxed{\frac{1}{e-2} = \frac{\partial y}{\partial u}}$$

$$\frac{1 + \frac{2}{e-2}}{2} = \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{e}{2e-4}}$$

(5) $$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot y \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

řetízek

v bodě $x=1 \quad y=0 \quad u=0 \quad v=1$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(0,1) = 1 \cdot 0 \cdot -1 \cdot \frac{e}{2e-4} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{e-2} = \boxed{\frac{1}{e-2}}$$

(můžeme řetízkovat, neb fce jsou C^1)

8a) $x^2 + (y-1)^2$

Řešení. Podotkněme, že je evidentní, že funkce f je nezáporná a nuly nabývá pouze v bodě $(0,1)$, kde tedy nabývá globálního minima. Pojďme nicméně vyšetřit existenci extrémů standardním postupem. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)$$

jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

$$2x = 0, \qquad 2(y-1) = 0$$

vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0,1)$, kde, jak už jsme zmínili funkce zřejmě nabývá globálního minima. Nemusíme tedy vyšetřovat definitnost matice druhého diferenciálu (navíc bychom tak dostali pouze informaci, že jde o lokální minimum). □

8b) **Úloha I.64.** $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(y-1)$$

jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

$$2x = 0, \qquad -2(y-1) = 0$$

vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0,1)$. Oproti předchozí úloze není automaticky vidět, zda se v tomto bodě nabývá extrému. Vyšetříme tedy definitnost matice druhého diferenciálu, tj. matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Určeme tedy nejprve druhé parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Matice druhého diferenciálu (v bodě $(0,1)$) má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a její hlavní determinanty jsou $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = -4 < 0$. Protože druhý hlavní determinant (tedy determinant celé matice) je záporný, je matice druhého diferenciálu indefitní, extrému se tedy v bodě $(0,1)$ nenabývá. Funkce f tedy v žádném bodě nemá lokální extrém.[5] □

8c) **Úloha I.65.** $f(x,y) = (x-y+1)^2$

Řešení. Je vidět, že funkce f je nezáporná. Ve všech bodech přímky $x - y + 1 = 0$ tedy nabývá globálního minima. Přesvědčíme se, že jiné extrémy funkce f nemá. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y+1), \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -2(x-y+1).$$

Je zjevné, že obě parciální derivace jsou nulové právě v bodech zmíněné přímky. V jiných bodech se tedy extrému nenabývá. □

Úloha I.66. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

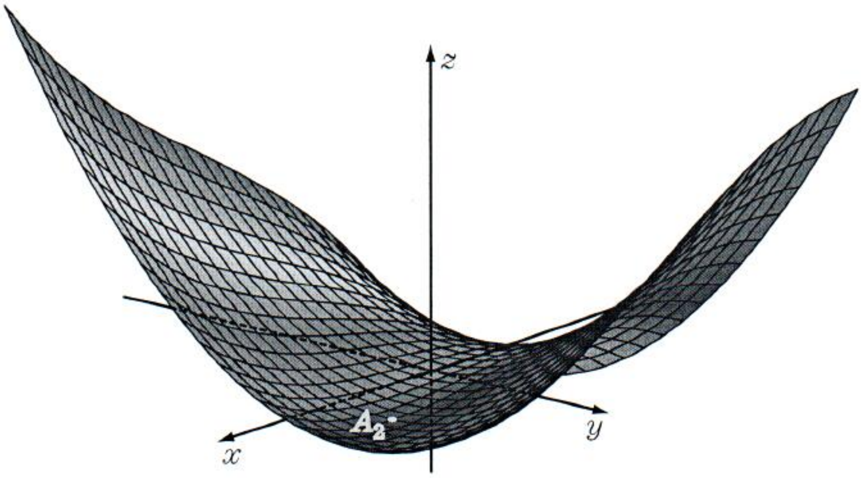
Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Její parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y + 1.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} 2x - y - 2 &= 0 \\ -x + 2y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

[5]) Úlohu lze opět řešit i pomocí úvah. Pokud $x \neq 0$, pak malým zvětšením absolutní hodnoty x se funkční hodnota f zvětší, zmenšením zmenší, takže v bodech, kde $x \neq 0$ se nemůže nabývat extrému. Z podobného důvodu nepřichází z hlediska extrému jiná možnost, než $y = 1$. Nicméně ani v bodě $(0,1)$ se nemůže nabývat extrému. Malým posunem hodnoty y se funkce f dostane do záporných, zatímco malým posunem hodnoty x do kladných hodnot.



Obr. 6.1.2

8c

Příklad 6.1.2. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2).$$

Řešení: Funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}^2$.

1. Určíme parciální derivace prvého řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2x)(2y^2+x^2)+\mathrm{e}^{-x^2-y^2}2x=-2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-1),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2y)(2y^2+x^2)+\mathrm{e}^{-x^2-y^2}4y=-2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-2).$$

2. Parciální derivace položíme rovny nule, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$. Dostaneme tak rovnice pro stacionární body funkce f,

$$-2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-1)=0,$$
$$-2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-2)=0.$$

3. Rovnice pro stacionární body vyřešíme. Výraz $\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je vždy různý od nuly pro libovolné x, y, můžeme jím proto obě rovnice vykrátit,

$$x(2y^2+x^2-1)=0,$$
$$y(2y^2+x^2-2)=0.$$

Položíme-li v první rovnici $x = 0$, dostáváme ze druhé rovnice $y(2y^2 - 2) = 0$ řešení $y = 0$, $y = \pm 1$. Získali jsem tři stacionární body $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [0, 1]$ a $A_3 = [0, -1]$.

Položíme-li ve druhé rovnici $y = 0$, pak z první rovnice $x(x^2 - 1) = 0$ plyne řešení ve tvaru $x = 0$, $x = \pm 1$. Stacionární bod $A_1 = [0, 0]$ jsme již vypočítali, takže na základě předpokladu $y = 0$ jsme získali dva nové stacionární body, bod $A_4 = [1, 0]$ a $A_5 = [-1, 0]$.

Zbývá ještě prověřit možnost, že $x \neq 0$, $y \neq 0$. V tomto případě řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 2y^2 + x^2 - 1 &= 0, \\ 2y^2 + x^2 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Jestliže obě rovnice od sebe odečteme, dostáváme rovnici $1 = 0$, toto ale neplatí pro žádné x, y. Soustava nemá za tohoto předpokladu řešení. Žádný nový stacionární bod jsme nezískali.

Shrneme-li krok 3, výsledkem naší snahy bylo určení pěti stacionárních bodů: $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [0, 1]$, $A_3 = [0, -1]$, $A_4 = [1, 0]$, $A_5 = [-1, 0]$.

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu.

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{pmatrix}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= ((-2 + 4x^2)(2y^2 + x^2 - 1) - 4x^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 3), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 3), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= ((-2 + 4y^2)(2y^2 + x^2 - 2) - 8y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

5. Do matice parciálních derivací postupně dosadíme stacionární body (tzn. x-ovou souřadnici stacionárního bodu dosadíme za proměnou x, y-ovou za y).

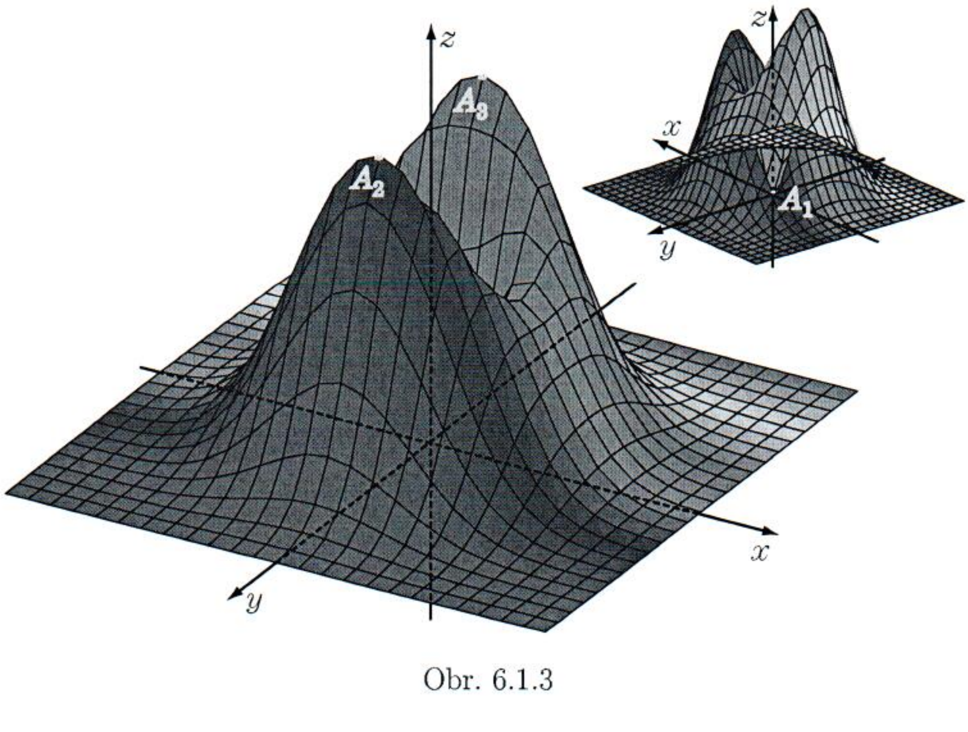
$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, Q(A_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}, Q(A_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix},$$

$$Q(A_4) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}, Q(A_5) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}.$$

6. Určíme hodnoty D_1, D_2 a rozhodneme o charakteru extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	extrém $z = f(A_i)$
$A_1 = [0, 0]$	$2 > 0$	$8 > 0$	ostré lokální minimum $z = 0$
$A_2 = [0, 1]$	$-\frac{2}{e} < 0$	$\frac{16}{e^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{e}$
$A_3 = [0, -1]$	$-\frac{2}{e} < 0$	$\frac{16}{e^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{e}$
$A_4 = [1, 0]$	$-\frac{4}{e} < 0$	$-\frac{8}{e^2} < 0$	extrém neexistuje
$A_5 = [-1, 0]$	$-\frac{4}{e} < 0$	$-\frac{8}{e^2} < 0$	extrém neexistuje

V bodě A_1 má funkce f ostré lokální minimum. V bodech A_2, A_3 má funkce f ostrá lokální maxima. V bodech A_4, A_5 funkce f extrém nemá, Obr. 6.1.3.



Obr. 6.1.3

1. Posuzujme nejprve body na ose x s výjimkou počátku. Na prstencovém okolí libovolného takového bodu osy x nabývá x^2 nezáporných hodnot a pro $x_0 \neq 6$ je pro dostatečně malé okolí bodu $(x_0, 0)$ hodnota výrazu $(6 - x - y)$ buď stále nekladná nebo stále nezáporná (tímto okolím může být např. dvojinterval $(x_0 - \varepsilon/4, x_0 + \varepsilon/4) \times (-\varepsilon/4, \varepsilon/4)$, kde $\varepsilon = |x_0 - 6|$). Ovšem na libovolném prstencovém okolí bodu $(x_0, 0)$ nabývá y^3 kladných i záporných hodnot, což implikuje že f nabývá pro $x_0 \neq 0$ a $x_0 \neq 6$ na nějakém okolí bodu $(x_0, 0)$ kladných i záporných hodnot, nemůže tedy mít v tomto bodě lokální extrém, neboť hodnota funkce f je v tomto bodě samozřejmě nula. Je-li $x_0 = 6$, nabývá funkce f kladných hodnot na „úsečce" $\{x_0\} \times (0,1)$ a záporných na „úsečce" $\{x_0\} \times (-1,0)$, opět tedy na každém okolí bodu $(6,0)$ nabývá kladných i záporných hodnot. Ani v bodě $(6,0)$ tedy není extrém.

2. Podobně nahlédneme, že funkce f nenabývá extrému v počátku, neboť nabývá kladných hodnot na množině $\{0\} \times (0,1)$ a záporných na množině $\{0\} \times (-1,0)$.

3. Vyšetřujme nyní extrémy funkce f ve zbylých bodech osy y. Opět, jestliže $y_0 \neq 6$ a $y_0 \neq 0$, potom existuje okolí bodu $(0, y_0)$ takové, že hodnota výrazu $6 - x - y$ je na něm nekladná nebo nezáporná (tímto okolím může být např. dvojinterval $(-\varepsilon/4, +\varepsilon/4) \times (y_0 - \varepsilon/4, y_0 + \varepsilon/4)$, kde $\varepsilon = |y_0 - 6|$). Stejně tak existuje okolí bodu $(0, y_0)$, kde je stále nekladný nebo nezáporný výraz y^3 (poslouží libovolný kroužek, který neprotíná počátek). A protože konečně x^2 je nezáporné číslo na $\mathbb{R}^2$ a průnik dvou okolí je okolí, dostáváme, že existuje okolí bodu $(0, y_0)$, kde funkce f nabývá pouze nekladných nebo nezáporných hodnot.

Navíc o tom, zda jsou tyto hodnoty nekladné nebo nezáporné, rozhoduje zřejmě znaménko výrazu $y^3(6 - x - y)$. Je-li x velmi malé a $y \neq 6$, je znaménko výrazu $(6 - x - y)$ stejné jako znaménko výrazu $(6 - y)$, tedy o znaménku f rozhoduje hodnota výrazu $y^3(6 - y)$, která je samozřejmě kladná pro $y \in (0,6)$ a záporná jindy. Z předchozích úvah vyplývá, že hodnoty funkce f na nějakém okolí bodu $(0, y_0)$ pro $y_0 \in (0,6)$ jsou nezáporné, a tedy funkce f má v těchto bodech (neostré) lokální minimum. Naopak, hodnoty funkce f na nějakém okolí bodu $(0, y_0)$ pro $y_0 \in (\infty, 0) \cup (6, +\infty)$ jsou nekladné, a tedy funkce f má v těchto bodech (neostré) lokální maximum.

4. Zbývá vyšetřit poslední bod $(0,6)$. Funkce f zde lokální extrém nemá. Její hodnota v tomto bodě je nulová, přitom na úsečce $(-1,0) \times \{6\}$ nabývá f kladných hodnot a na úsečce $(0,1) \times \{6\}$ záporných hodnot. Na libovolném okolí bodu $(0,6)$ tedy funkce nabývá hodnot větších i menších, než je hodnota funkce f v bodě $(0,6)$. □

8a

Úloha I.68. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0. \end{aligned}$$

Krácením trojek, vyjádřením $y = x^2$ z první rovnice a dosazením do druhé dostaneme rovnici

$$x^4 - x = 0,$$

která má vzhledem k rozkladu $x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1)$ dvě řešení, $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$. Těmto dvěma řešením přísluší řešení $y_1 = 0$ a $y_2 = 1$.

Druhé parciální derivace jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3.$$

Matice druhého diferenciálu v prvním stacionárním bodě $(1,1)$ je tedy

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

hlavní subdeterminanty jsou $D_1 = 6 > 0$, $D_2 = 36 - 9 = 27 > 0$, matice je tedy pozitivně definitní a v bodě $(1,1)$ má tedy funkce f lokální minimum $f(1,1) = -1$.

Matice druhého diferenciálu ve druhém stacionárním bodě $(0,0)$ je ovšem

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

je tedy indefinitní, funkce f v bodě $(0,0)$ tedy nenabývá extrému. □

Úloha I.69. $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2y - 2x.$$

Matice druhého diferenciálu je tedy

$$\begin{pmatrix} 24x^2-2 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$$

což je diagonální matice. Posoudit definitnost je tedy snazší přímo z hodnot na diagonále. Pokud jsou obě hodnoty kladné, je matice pozitivně definitní, což je případ čtyř bodů $(\pm\frac{1}{2}, \pm 1)$ - v nich má tedy funkce f lokální minimum. V bodě $(0,0)$ jsou obě hodnoty záporné, matice je tedy negativně definitní a v bodě $(0,0)$ má tedy funkce f lokální maximum. Ve zbylých čtyřech bodech je jedna hodnota na diagonále kladná a druhá záporná, matice je tedy indefinitní a extrému v daném bodě se nenabývá. □

Be ||

Úloha I.71. $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$, $x > 0, y > 0$.

Řešení. Funkce f je dle zadání definována na prvním kvadrantu. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{50}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2}.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} y - \frac{50}{x^2} &= 0 \\ x - \frac{20}{y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice máme, že $y = \frac{50}{x^2}$, dosazením do druhé a přenásobením jmenovatelem získáme rovnici

$$x - \frac{20}{50^2}x^4 = 0.$$

Její řešení jsou $x_1 = 0$ a $x_2 = \sqrt[3]{\frac{50^2}{20}} = \sqrt[3]{125} = 5$. První řešení ovšem nemůže být částí řešení celé soustavy. Odpovídající hodnotou pro druhý kořen je $y_2 = \frac{50}{25} = 2$. Funkce f má tedy (v prvním kvadrantu) jediný stacionární bod $(5,2)$.
Druhé parciální derivace jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{100}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

Matice druhého diferenciálu v bodě $(5,2)$ je tedy

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

hlavní subdeterminanty jsou $D_1 = \frac{4}{5} > 0$ a $D_2 = 4 - 1 = 3 > 0$, matice je tedy pozitivně definitní a funkce f má tudíž v bodě $(5,2)$ (ostré) lokální minimum $f(5,2) = 30$. □

Úloha I.72. $f(x,y) = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$, kde $a > 0, b > 0$.

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.73. $f(x,y) = \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$, kde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.74. $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.75. $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

Řešení. Funkce f je dle zadání definována na $\mathbb{R}^2$. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) + e^{2x+3y}(16x - 6y) = e^{2x+3y}(16x^2 + 16x - 12xy + 6y^2 - 6y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) + e^{2x+3y}(-6x + 6y) = e^{2x+3y}(24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y).$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} e^{2x+3y}(16x^2 + 16x - 12xy + 6y^2 - 6y) &= 0 \\ e^{2x+3y}(24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y) &= 0. \end{aligned}$$

8a) $x^2 + (y-1)^2$

Řešení. Podotkněme, že je evidentní, že funkce f je nezáporná a nuly nabývá pouze v bodě $(0,1)$, kde tedy nabývá globálního minima. Pojďme nicméně vyšetřit existenci extrémů standardním postupem. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)$$

jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

$$2x = 0, \qquad 2(y-1) = 0$$

vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0,1)$, kde, jak už jsme zmínili funkce zřejmě nabývá globálního minima. Nemusíme tedy vyšetřovat definitnost matice druhého diferenciálu (navíc bychom tak dostali pouze informaci, že jde o lokální minimum). □

8b) || **Úloha I.64.** $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(y-1)$$

jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

$$2x = 0, \qquad -2(y-1) = 0$$

vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0,1)$. Oproti předchozí úloze není automaticky vidět, zda se v tomto bodě nabývá extrému. Vyšetříme tedy definitnost matice druhého diferenciálu, tj. matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Určeme tedy nejprve druhé parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Matice druhého diferenciálu (v bodě $(0,1)$) má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a její hlavní determinanty jsou $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = -4 < 0$. Protože druhý hlavní determinant (tedy determinant celé matice) je záporný, je matice druhého diferenciálu indefitní, extrému se tedy v bodě $(0,1)$ nenabývá. Funkce f tedy v žádném bodě nemá lokální extrém.[5] □

8c) || **Úloha I.65.** $f(x,y) = (x-y+1)^2$

Řešení. Je vidět, že funkce f je nezáporná. Ve všech bodech přímky $x - y + 1 = 0$ tedy nabývá globálního minima. Přesvědčíme se, že jiné extrémy funkce f nemá. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y+1), \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -2(x-y+1).$$

Je zjevné, že obě parciální derivace jsou nulové právě v bodech zmíněné přímky. V jiných bodech se tedy extrému nenabývá. □

Úloha I.66. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Její parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y + 1.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} 2x - y - 2 &= 0 \\ -x + 2y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

[5]) Úlohu lze opět řešit i pomocí úvah. Pokud $x \neq 0$, pak malým zvětšením absolutní hodnoty x se funkční hodnota f zvětší, zmenšením zmenší, takže v bodech, kde $x \neq 0$ se nemůže nabývat extrému. Z podobného důvodu nepřichází z hlediska extrému jiná možnost, než $y = 1$. Nicméně ani v bodě $(0,1)$ se nemůže nabývat extrému. Malým posunem hodnoty y se funkce f dostane do záporných, zatímco malým posunem hodnoty x do kladných hodnot.

Řešením této rovnice jsou hodnoty $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Dosadíme-li získané hodnoty do rovnice $x^2 - 2y = 0$, abychom vypočetli y-ové souřadnice stacionárních bodů, dostáváme $y_1 = 0, y_2 = 2$. Zkoumaná funkce má tedy dva stacionární body $B_1 = [0,0], B_2 = [2,2]$.

Nyní přistoupíme ke zkoumání charakteru bodů B_1, B_2 a k tomu je zapotřebí vypočítat parciální derivace druhého řádu. Obdržíme

$$f_{xx} = 6x, \qquad f_{xy} = -6 \qquad \text{a} \qquad f_{yy} = 6y.$$

Protože $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0.0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = -36 < 0$, vidíme, že bod B_1 je sedlovým bodem funkce $f(x,y)$.

Analogickým postupem ze vztahů $f_{xx}(2,2) \cdot f_{yy}(2,2) - [f_{xy}(2,2)]^2 = 108 > 0$ a $f_{xx}(2,2) = 12 > 0$ dostáváme, že bod B_2 je bodem lokálního minima funkce $f(x,y)$.

Příklad 8.11. Najděte lokální extrémy funkce tří proměnných dané vztahem $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$.

Řešení. Vyjdeme opět z parciálních derivací finkce $f(x,y,z)$, které mají tvar

$$f_x = 3x^2 - 3y - 3z, \qquad f_y = 3y^2 - 3x \qquad \text{a} \qquad f_z = 3z^2 - 3x.$$

Položíme-li obdržené parciální derivace rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y - z &= 0 \\ y^2 - x &= 0 \\ z^2 - x &= 0. \end{aligned}$$

Dále lze dosadit y^2 za x do první a třetí rovnice, což dává vztahy

$$\begin{aligned} y^4 - y - z &= 0 \\ z^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z rovnosti $z^2 = y^2$ máme $z = y$ nebo $z = -y$.

Uvažujme nejprve případ $z = y$. Dosadíme-li za z do rovnice $y^4 - y - z = 0$, dostáváme

$$y(y^3 - 2) = 0.$$

Z obdrženého vztahu vyplývá, že $y_1 = 0$ nebo $y_2 = \sqrt[3]{2}$. Dále ihned vidíme že těmto hodnotám odpovídají hodnoty proměnné z ve tvaru $z_1 = 0, z_2 = \sqrt[3]{2}$.

Z rovnosti $x = z^2$ pak vypočteme $x_1 = 0$ a $x_2 = \sqrt[3]{4}$. Obdrželi jsme tedy dva stacionární body

$$B_1 = [0, 0, 0] \quad \text{a} \quad B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}].$$

Vyšetříme-li nyní případ $z = -y$, dostáváme po dosazení za proměnnou z do rovnice $y^4 - y - z = 0$ rovnost $y^4 = 0$, což nám dává kořen $y_3 = 0$. Pak ale také $z_3 = 0$ a $x_3 = 0$. V tomto případě jsme tedy neobdrželi žádný další stacionární bod, který by byl různý od bodů B_1 a B_2.

Pro parciální derivace druhého řádu dostaneme

$$f_{xx} = 6x, f_{yy} = 6y, f_{zz} = 6z, f_{xy} = -3, f_{xz} = -3, f_{yz} = 0.$$

Chceme-li nyní vyšetřit kvadratickou formu, kterou představuje diferenciál druhého řádu, pracujeme vlastně s determinantem

$$D = \begin{vmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{vmatrix}.$$

Uvažujeme-li bod $B_1 = [0, 0, 0]$, dostaneme

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ihned vidíme, že hlavní minor $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$ je záporný, což znamená, že příslušná kvadratická forma je indefinitní a počátek je tedy sedlovým bodem funkce $f(x, y, z)$.

V bodě $B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$ máme

$$D = \begin{vmatrix} 6\sqrt[3]{4} & -3 & -3 \\ -3 & 6\sqrt[3]{2} & 0 \\ -3 & 0 & 6\sqrt[3]{2} \end{vmatrix}$$

a vidíme, že $D_1 = 6\sqrt[3]{4} > 0, D_2 = 36 \cdot 2 - 9 > 0, D_3 = 216\sqrt[3]{16} - 108\sqrt[3]{2} > 0$. Kvadratická forma je tedy pozitivně definitní a bod B_2 je v důsledku toho bodem lokálního minima funkce $f(x, y, z)$.