11. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

1 Implicitní funkce

Teorie

Věta 1. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}$, $[\bar{x}, \bar{y}] \in G$ a nechť platí:

1. $F \in C^k(G)$
2. $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$
3. $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{x},\bar{y}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\bar{x},\bar{y}) \\ & \ddots & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\bar{x},\bar{y}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\bar{x},\bar{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí bodu $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\bar{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\bar{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak pak $\varphi \in C^k(U)$.

Příklady

1. Jsou dány vztahy
$$e^{u/x}\cos(v/y) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$
$$e^{u/x}\sin(v/y) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$
Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu $[1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]$ funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ třídy C^∞. Spočtěte parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial x}$.

2. Ukažte, že existují funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ definované na nějakém okolí U bodu $[1, 2]$, které jsou na U třídy C^1, splňují $u(1, 2) = 0$, $v(1, 2) = 0$ a platí pro ně rovnice
$$xe^{u+v} + 2uv = 1$$
$$ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$
Spočtěte $u'(1, 2)$ a $v'(1, 2)$.

3. Dokažte, že existují funkce $z(x,y)$ a $t(x,y)$, které jsou třídy C^∞ na nějakém okolí U obsahujícím $[1,-1]$ a splňují rovnice
$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0$$
$$x + y + z - t - 2 = 0.$$
Spočtěte $z''(1,-1)$.

4. Ukažte, že rovnice
$$x = u + v^2$$
$$y = u^2 - v^3$$
definují na jistém okolí bodu $[3,3]$ funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$ třídy C^∞, které splňují $u(3,3) = 2$, $v(3,3) = 1$. Spočtěte $z_{xy}(3,3)$, pokud $z = 2uv$.

5. Spočtěte x_v, y_v a z_v, pokud
$$u = x^2 + y^2,$$
$$v = x^2 - 2xy^2,$$
$$z = \ln(y^2 - x^2)$$
v bodě $u = 5$, $v = -7$, $x(5,-7) = 1$ a $y(5,-7) = 2$.

(Rada: Prve řešte první dvě rovnice pomocí Věty o implicitních funkcích, z_v pak vyjádřete řetízkovým pravidlem.)

Zkouškové příklady

6. Ukažte, že vztahy
$$u = \ln(xy) + \cos v$$
$$v = e^{x-u} - y^2 - v$$
definují na jistém okolí bodu $[x,y,u,v] = [1,1,1,0]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(1,0) = 1$ a $y(1,0) = 1$. Rozhodněte, zda existuje totální diferenciál funkce $y(u,v)$ v bodě $[1,0]$ a pokud ano, nalezněte jej.

7. Ukažte, že vztahy
$$u = \ln(x^2 + y^2) - 2xy$$
$$v = e^x \sin y + \frac{1}{x^2}$$
definují na jistém okolí bodu $[x,y,u,v] = [1,0,0,1]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(0,1) = 1$ a $y(0,1) = 0$. Nechť navíc je z funkce proměnných x a y definovaná na okolí bodu $[x,y] = [1,0]$ předpisem $z(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ a nechť Φ je funkce proměnných u a v definovaná na okolí bodu $[u,v] = [0,1]$ předpisem $\Phi(u,v) = z(x(u,v), y(u,v))$. Spočtěte $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(0,1)$.

2 Lokální extrémy

Teorie

Věta 2 (Nutná podmínka existence extrému)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1, \cdots, n\}$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Věta 3 (Postačující podmínky pro lokální extrém)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a nechť $f \in C^2(G)$. Nechť $\operatorname{grad} f(a) = 0$. Pak

(a) Je-li kvadratická forma $f''(a)$ positivně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního minima.

(b) Je-li kvadratická forma $f''(a)$ negativně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního maxima.

(c) Je-li kvadratická forma $f''(a)$ indefinitní, pak funkce f nenabývá v bodě a lokálního extrému.

Poznámka 4 (Sylvesterovo kritérium)**.** Nechť $\mathbf{A}$ je symetrická matice reálných čísel typu (n, n). Označme $\{D_k\}$ posloupnost determinantů levých horních rohů. Pak

(a) $\mathbf{A}$ je positivně definitní, právě když všechna $D_k > 0$.

(b) $\mathbf{A}$ je negativně definitní, právě když $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0 \ldots$

(c) jestliže jsou všechny hlavní subdeterminanty nenulové a navíc nenastal žádný z předchozích případů, tak $\mathbf{A}$ je indefinitní,

Příklady

8. Najděte lokální extrémy funkcí

(a) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$

(b) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$

(c) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$

(d) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(e) $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

(f) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$

(g) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$