Tečná rovina τ je pak dána rovnicí

$$\tau: \frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{A})(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{A})(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})(z-z_0) = 0.$$

Věta 5.3.6.
Nechť $z = f(x,y)$ je implicitní funkce určená rovnicí $F(x,y,z) = 0$ a bodem $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0]$. **Tečná rovina** ke grafu implicitní funkce $z = f(x,y)$ v bodě $\boldsymbol{A}$ bude určena rovnicí

$$\tau: \frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{A})(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{A})(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})(z-z_0) = 0.$$

Poznámka
Všimněte si, že na levé straně rovnice tečné roviny vystupuje diferenciál funkce F v bodě $\boldsymbol{A}$.

Řešené úlohy

1

Příklad 5.3.1. Vypočítejte y', y'' implicitní funkce dané rovnicí

$$(x^2+y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$$

v bodě $[0,1]$.

Řešení:

1. Nejdříve při určení y' vyjdeme z věty 5.3.2.

$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 3x^2y - y^3,$$

vypočítáme jednotlivé parciální derivace funkce F podle proměnných x a y v bodě $[0,1]$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,1) = (2(x^2+y^2)2x - 6xy)\Big|_{[0,1]} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = (2(x^2+y^2)2y - 3x^2 - 3y^2)\Big|_{[0,1]} = 1.$$

Dosadíme do vzorce pro derivaci implicitní funkce a dostáváme

$$y'(0) = f'(0) = -\frac{4x^3 + 4xy^2 - 6xy}{4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2}\bigg|_{[0,1]} = -\frac{0}{1} = 0.$$

2. Jiný způsob jak najít y'. V rovnici $(x^2+y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$ prohlásíme y za funkci proměnné x a rovnici derivujeme podle x. Nechť $y = y(x)$, pak

$$2(x^2+y^2)(2x+2yy') - 3(2xy + x^2y') - 3y^2y' = 0.$$

Aby bylo zcela jasné, jak jsme k předcházející rovnici dospěli, rozeberme si podrobně, jak se derivují funkce v této rovnici, konkrétně $-3x^2y$ a $-y^3$. Znovu zdůrazněme, že jsme předpokládali závislost y na x, tedy $y = y(x)$. Derivujeme $-3x^2y$ podle pravidla o součinu dvou funkcí proměnné x,

$$(-3x^2y)' = -3(x^2y)' = -3[(x^2)'y + x^2(y)'] = -3(2xy + x^2y').$$

Zde derivace y podle x není nula, protože jsme předpokládali, že y závisí na x. Derivace y podle x se bude značit standardně, y'.

Derivujeme $-y^3$ podle pravidla o derivaci složené funkce,

$$(-y^3)' = -(y^3)' = -3y^2y'.$$

Řekněme, že si pro lepší názornost zvolíme nějakou konkrétní závislost y na x, např. nechť $y = \sin x$. Tedy $-y^3 = \sin^3 x$. Jak bude vypadat derivace v tomto konkrétním případě?

$$\begin{aligned}(-y^3)' &= -(y^3)' \overset{y=\sin x}{=} -(\sin^3 x)' = -3\sin^2 x \cos x \\ &= -3\sin^2 x(\sin x)' \overset{\sin x = y}{=} -3y^2(y)' = -3y^2y'.\end{aligned}$$

Vraťme se k původní úloze. Poté co jsme rovnici derivovali podle x, stačí nyní vyjádřit z této derivované rovnice y',

$$\begin{aligned}&4x^3 + 4yy' + 4xy^2 + 2y^3y' - 6xy - 3x^2y' - 3y^2y' = 0,\\ &(4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2)y' = -4x^3 - 4xy^2 + 6xy,\\ &y' = -\frac{4x^3 + 4xy^2 - 6xy}{4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2},\end{aligned}$$

$$y' = -\frac{(12x^2 + 4y^2 + 4x - 2y\cdot y' - 6y - 6xy')(4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2) - (4x^3 + 4xy^2 - 6xy)(8xy + 4x^2y' - 6x - 6yy')}{(4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2)^2}$$

$x = 0 \quad y = 1 \quad y' = 0$

$$y''(0) = -\frac{(4-6)(4-3) - 0(\cdots)}{(4-3)^2} = \underline{2}$$

dosadíme bod $[0, 1]$ a dostaneme výsledek

$$y'(0) = -\frac{0}{1} = 0.$$

Příklad 5.3.2. Vypočítejte y', y'', implicitní funkce $y = f(x)$ určené rovnicí

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

2 v bodě $[1, 1]$.

Řešení:

1. Využijeme větu 5.3.2. Ze zadání dostáváme $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$.

$$y'(1) = -\left.\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\right|_{[1,1]} = -\left.\frac{2x + y}{x + 2y}\right|_{[1,1]} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Pro určení druhé derivace využijeme vztah uvedený za větou 5.3.2. Vypočítáme jednotlivé hodnoty parciálních derivací a determinant matice vytvořené z těchto hodnot. Tedy,

$$y''(1) = f''(1) = \left.\frac{1}{(x+2y)^3}\right|_{[1,1]} \begin{vmatrix} 0 & (2x+y)\big|_{[1,1]} & (x+2y)\big|_{[1,1]} \\ (2x+y)\big|_{[1,1]} & 2\big|_{[1,1]} & 1\big|_{[1,1]} \\ (x+2y)\big|_{[1,1]} & 1\big|_{[1,1]} & 2\big|_{[1,1]} \end{vmatrix},$$

$$y''(1) = \frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}(-18) = -\frac{2}{3}.$$

2. Totéž můžeme získat i jiným způsobem. Budeme předpokládat v rovnici implicitní funkce závislost y na x, rovnici derivujeme podle x a vyjádříme y'.

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x + y}{x + 2y} \Rightarrow y'(1) = -\frac{3}{3} = -1.$$

K získání druhé derivace implicitní funkce y'' musíme rovnici implicitní funkce derivovat dvakrát podle x a vyjádřit y''. Rovnici implicitní funkce jsme již jednou derivovali, stačí ji derivovat ještě jednou podle x,

$$(2x + y + xy' + 2yy' = 0)' \Rightarrow 2 + y' + y' + xy'' + 2y'y' + 2yy'' = 0,$$

$$2 + 2y' + 2(y')^2 + (x + 2y)y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{2 + 2y' + 2(y')^2}{x + 2y}$$

$$y''(1) = -\frac{2 + 2\cdot(-1) + 2(-1)^2}{1 + 2\cdot 1} = -\frac{2}{3}.$$

Příklad 5.3.3. Nalezněte derivaci funkce $y = f(x)$ dané implicitně rovnicí

$$x \sin y + \cos 2y = \cos y.$$

Řešení:

1. S využitím věty 5.3.2. a pro $F(x, y) = x \sin y - \cos y + \cos 2y$ dostáváme

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\sin y}{x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y}, \quad x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y \neq 0.$$

2. Předpokládejme v rovnici implicitní funkce závislost y na x, derivujme rovnici podle x a vyjádřeme y'. Tedy

$$\sin y + x \cos y y' + \sin y y' - 2 \sin 2y y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{\sin y}{x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y},$$

přičemž

$$x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y \neq 0.$$

Příklad 5.3.4. Nalezněte parciální derivace prvého řádu funkce $z = f(x, y)$ dané implicitně rovnicí

$$4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$$

v bodě $[1, 1, 1]$.

Řešení:

1. Využijeme větu 5.3.5. Pro $F(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4$

dosadíme bod $[0,\pi]$ a dostáváme

$$y'(0) = -\frac{\pi}{-1+2\pi}.$$

3

Příklad 7.10. Ověřte, že rovnice $x^2 + xy^2 - y^2 = 1$ zadává v bodě $[-2,1]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$. Vypočítejte její první a druhou derivaci a napište Taylorův polynom $T_2(x)$ se středem v bodě -2.

Řešení. Označme $F(x,y) = x^2 + xy^2 - y^2 - 1$, $[x_0, y_0] = [-2,1]$. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 7.2. Funkce F má spojité parciální derivace v $\mathbb{R}^2$. Jelikož $F(-2,1) = (-2)^2 - 2 - 1 - 1 = 0$ a

$$F_y(x,y) = 2xy - 2y \quad \Rightarrow \quad F_y(-2,1) = -6 \neq 0,$$

jsou předpoklady věty 7.2 splněny. Rovnicí $x^2 + xy^2 - y^2 - 1 = 0$ je v okolí bodu $[-2,1]$ určena implicitně funkce $y = f(x)$ mající derivace všech řádů, pro niž platí, že $f(-2) = 1$. Protože

$$F_x(x,y) = 2x + y^2 \quad \Rightarrow \quad F_x(-2,1) = -3,$$

je podle (7.1)

$$y'(x) = f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{2x+y^2}{2xy-2y} \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = -\frac{1}{2}.$$

Druhou derivaci $y''(x)$ spočteme podle věty 7.4 derivováním první derivace a dostaneme

$$\begin{aligned}
y'' &= (y')' = \left(-\frac{2x+y^2}{2xy-2y}\right)' = \\
&= -\frac{(2+2yy')(2xy-2y) - (2x+y^2)(2y+2xy'-2y')}{(2xy-2y)^2} = \\
&= -\frac{(2-2y\frac{2x+y^2}{2xy-2y})(2xy-2y) - (2x+y^2)(2y-2x\frac{2x+y^2}{2xy-2y}+2\frac{2x+y^2}{2xy-2y})}{(2xy-2y)^2} = \\
&= -\frac{-4y^2-3y^4+4x^2}{y(2xy-2y)^2}.
\end{aligned}$$

Hodnota druhé derivace $y''(x)$ v bodě -2 je

$$y''(-2) = f''(-2) = -\frac{-4-3+4(-2)^2}{(2(-2)-2)^2} = -\frac{9}{36} = -\frac{1}{4}.$$

Jelikož jsme spočetli první i druhou derivaci, můžeme funkci $y = f(x)$ nahradit Taylorovým polynomem druhého řádu se středem v bodě $x_0 = -2$. Taylorův polynom $T_2(x)$ má tvar

$$T_2(x) = f(-2) + f'(-2)(x+2) + \frac{1}{2}f''(-2)(x+2)^2,$$

tudíž

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{8}(x+2)^2.$$

4

Příklad 7.11. Ověřte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ zadává v bodě $[\pi, \pi]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$, a najděte rovnice tečny a normály ke grafu této funkce v bodě $[\pi, \pi]$.

Řešení. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 7.2 pro funkci $F(x, y) = y - \frac{1}{2}\sin y - x$ a pro $[x_0, y_0] = [\pi, \pi]$. Funkce F má spojité parciální derivace v $\mathbb{R}^2$. Platí $F(\pi, \pi) = \pi - \frac{1}{2}\sin\pi - \pi = \pi - 0 - \pi = 0$ a

$$F_y(x, y) = 1 - \frac{1}{2}\cos y \quad \Rightarrow \quad F_y(\pi, \pi) = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.2 jsou splněny, takže rovnicí $y - \frac{1}{2}\sin y - x = 0$ je v okolí bodu $[\pi, \pi]$ určena implicitně právě jedna funkce $y = f(x)$ pro niž platí $f(\pi) = \pi$. Hledáme tečnu k implicitně dané funkci. Budeme vycházet z rovnice tečny t ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, y_0 = f(x_0)]$, tj. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Dosadíme do rovnice za f' vzorec (7.1) a dostáváme

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

Parciální derivaci F_y již spočtenou máme, dopočteme parciální derivaci F_x

$$F_x(x, y) = -1 \quad \Rightarrow \quad F_x(\pi, \pi) = -1.$$

Derivace f' v bodě $x = \pi$ je

$$f'(\pi) = -\frac{F_x(\pi, \pi)}{F_y(\pi, \pi)} = -\frac{-1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Rovnice tečny t je

$$y - \pi = \frac{2}{3}(x - \pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}x - y + \frac{1}{3}\pi = 0.$$

Normála n je přímka kolmá k tečně, využijeme faktu, že směrový vektor tečny je stejný jako normálový vektor normály. V našem případě je normálový vektor tečny $\mathbf{n}_t = (\frac{2}{3}, -1)$, směrový vektor tečny $\mathbf{s}_t = (1, \frac{2}{3})$ je totožný s normálovým vektorem normály n. Tudíž rovnice normály n je daná rovnicí $x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}\pi = 0$.

Poznámka 7.12. Hodnota $-\frac{5}{3}\pi$ se dopočte dosazením normálového vektoru normály $\mathbf{n}_n = (1, \frac{2}{3})$ a bodu $[\pi, \pi]$ do obecné rovnice přímky v rovině.

Příklad 7.13. Ověřte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ zadává v bodě $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$. Rozhodněte, zda graf této funkce dané implicitně leží v okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

5

Řešení. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 7.2 pro funkci $F(x,y) = y - \frac{1}{2}\sin y - x$ a pro $[x_0, y_0] = [\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Funkce F má spojité parciální derivace v $\mathbb{R}^2$. Platí $F(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi-1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi-1}{2} = 0$ a

$$F_y(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\cos y \quad \Rightarrow \quad F_y\left(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.2 jsou splněny, takže rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y - x = 0$ v okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ určuje implicitně právě jednu funkci $y = f(x)$ mající derivace všech řádů takovou, že $f(\frac{\pi-1}{2}) = \frac{\pi}{2}$. K tomu, abychom určili, zda bod $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ leží pod nebo nad tečnou, musíme spočíst druhou derivaci podle x. Budeme určovat, zda implicitně určená funkce je v bodě $x = \frac{\pi-1}{2}$ konvexní nebo konkávní. Derivujeme-li rovnici $y - \frac{1}{2}\sin y - x = 0$ podle x (připomeňme si, že uvažujeme y jako funkci proměnné x), dostáváme

$$y' - \frac{1}{2}y'\cos y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'\left(\frac{\pi-1}{2}\right) = 1.$$

Dalším derivováním podle x (s využitím věty 7.4) obdržíme

$$y'' - \frac{1}{2}y''\cos y + \frac{1}{2}(y')^2\sin y = 0$$

a odtud

$$y'' = \frac{-\frac{1}{2}(y')^2\sin y}{1 - \frac{1}{2}\cos y}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu bod $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dostaneme $y''(\frac{\pi-1}{2}) = -\frac{1}{2}$. To znamená, že křivka leží v okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pod tečnou, neboť implicitně určená funkce je v bodě $x = \frac{\pi-1}{2}$ konkávní (druhá derivace v daném bodě je záporná).

6

Příklad 7.14. K rovnici $-x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$ najděte body, v nichž jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci 7.2 a které jsou stacionárními body takto implicitně definovaných funkcí jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.

Řešení. Označme $F(x, y) = -x^2 + y^2 - 2xy + y$. Hledáme body, které vyhovují rovnici $F(x_0, y_0) = 0$ a platí pro ně $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Potom z věty 7.2 vyplývá, že v okolí každého takového bodu je rovnicí $F(x, y) = 0$ určena jediná implicitní funkce $y = f(x)$. Dále požadujeme, aby x_0 byl stacionárním bodem této funkce, tedy aby

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x(x_0, y_0) = 0.$$

Hledané body získáme vyřešením soustavy rovnic $F(x, y) = 0$ a $F_x(x, y) = 0$. V našem případě tedy

$$F(x, y) = -x^2 + y^2 - 2xy + y = 0 \quad \text{a} \quad F_x(x, y) = -2x - 2y = 0.$$

Z druhé rovnice máme $y = -x$. Dosazením $y = -x$ do první rovnice dostáváme $x(2x-1) = 0$ a odtud $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Máme dva stacionární body: $P = [0, 0]$, $Q = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$. Nyní musíme ověřit, zda v těchto bodech platí $F_y(x, y) \neq 0$. Spočteme $F_y(x, y) = 2y - 2x + 1$ a dosadíme body P, Q, tj.

$$F_y(P) = 1 \neq 0, \quad F_y(Q) = 3 \neq 0.$$

Jak v okolí bodu P, tak v okolí bodu Q je rovnicí $F(x, y) = 0$ určena implicitně funkce jedné proměnné $f_1(x)$, resp. $f_2(x)$.
Abychom mohli extrémy v nalezených bodech určit, musíme spočíst druhé derivace implicitně dané funkce. Derivace spočteme pomocí věty 7.4, tj. Derivujeme zadanou rovnici podruhé podle x,

$$((1 - 2x + 2y)y' = 2x + 2y)' \Rightarrow (-2 + 2y')y' + (1 - 2x + 2y)y'' = 2 + 2y'.$$

Odtud

$$y'' = \frac{2 + 4y' - 2(y')^2}{1 - 2x + 2y}.$$

Postupně dosadíme stacionární body P, Q do y'':

$$f_1''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{minimum},$$

$$f_2''(\frac{1}{2}) = -2 < 0 \Rightarrow \text{maximum}.$$

Funkce $f_1(x)$ má v bodě 0 lokální minimum a funkce $f_2(x)$ má v bodě $\frac{1}{2}$ lokální maximum.

7

Příklad 7.15. Ověřte, že rovnice $\ln x^2z^3 = \mathrm{e}^{z\cos y} - 1$ zadává v okolí bodu $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x, y)$. Vypočtěte její parciální derivace prvního řádu a určete jejich hodnotu v daném bodě $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$.

Řešení. Pro $F(x, y, z) = \ln x^2z^3 - \mathrm{e}^{z\cos y} + 1$ a bod $[x_0, y_0, z_0] = [-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ ověříme, zda jsou splněny předpoklady věty 7.6. Platí

$$F\left(-1, \frac{\pi}{2}, 1\right) = \ln 1 - \mathrm{e}^0 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0.$$

Dále

$$F_z(x, y, z) = \frac{3}{z} - \mathrm{e}^{z\cos y}\cos y \quad \Rightarrow \quad F_z(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = 3 \neq 0.$$

Rovnicí $\ln x^2z^3 - \mathrm{e}^{z\cos y} + 1 = 0$ je v okolí bodu $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ implicitně zadána funkce $z = f(x, y)$ taková, že $f(-1, \frac{\pi}{2}) = 1$. Parciální derivace z_x, z_y vypočteme ze vzorce (7.2), tj.

$$z_x = f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{2}{x}}{\frac{3}{z} - \mathrm{e}^{z\cos y}\cos y} \quad \Rightarrow \quad z_x\left(-1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3},$$

$$z_y = f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\mathrm{e}^{z\cos y}z\sin y}{\frac{3}{z} - \mathrm{e}^{z\cos y}\cos y} \quad \Rightarrow \quad z_y\left(-1, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Totéž můžeme spočíst i jiným způsobem. Budeme hledat z_x, z_y podle níže popsaného postupu. Nejdříve spočteme z_x, tj. v rovnici $F(x, y, z) = 0$ budeme uvažovat y jako konstantu a z bude funkcí x, y. Rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme derivaci z_x. Tentýž postup platí i pro určení derivace z_y jen s tím rozdílem, že v rovnici $F(x, y, z) = 0$ budeme uvažovat proměnnou x jako konstantu a rovnici derivujeme podle y.

$$(\ln x^2z^3)_x = (\mathrm{e}^{z\cos y} - 1)_x \Rightarrow \frac{2xz^3}{x^2z^3} + \frac{3x^2z^2z_x}{x^2z^3} = \mathrm{e}^{z\cos y}z_x\cos y.$$

Odtud vyjádříme z_x,

$$z_x = \frac{\frac{2}{x}}{e^{z\cos y} - \frac{3}{z}}.$$

$$(\ln x^2 z^3)_y = (e^{z\cos y} - 1)_y \Rightarrow \frac{3x^2z^2z_y}{x^2z^3} = e^{z\cos y} z_y \cos y - e^{z\cos y} z \sin y.$$

Odtud vyjádříme z_y,

$$z_y = \frac{-e^{z\cos y} z \sin y}{\frac{3}{z} - e^{z\cos y}\cos y}.$$

Příklad 7.16. Ověřte, že rovnice $z + e^z = xy + 2$ zadává v okolí bodu $[-1, 1, 0]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x, y)$, a vypočítejte první a druhé parciální derivace této funkce f v daném bodě.

Řešení. Označme $F(x, y, z) = z + e^z - xy - 2$, $[x_0, y_0, z_0] = [-1, 1, 0]$. Ověříme, zda jsou splněny předpoklady věty 7.6. Je $F(-1, 1, 0) = 0 + e^0 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$. Dále

$$F_z(x, y, z) = 1 + e^z \quad \Rightarrow \quad F_z(-1, 1, 0) = 2 \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.6 jsou splněny a rovnice $z + e^z - xy - 2$ v okolí bodu $[-1, 1, 0]$ implicitně zadává právě jednu funkci $z = f(x, y)$ pro niž platí $f(-1, 1) = 0$. Protože funkce F má spojité parciální derivace libovolného řádu, platí totéž podle věty 7.7 i pro funkci f. Nejdříve budeme počítat parciální derivace prvního řádu, tj. z_x, z_y, podle vzorce (7.2). Tedy

$$z_x(-1, 1) = f_x(-1, 1) = -\frac{F_x}{F_z}\Big|_{[-1,1,0]} = -\frac{-y}{1 + e^z}\Big|_{[-1,1,0]} = \frac{1}{2}.$$

$$z_y(-1, 1) = f_y(-1, 1) = -\frac{F_y}{F_z}\Big|_{[-1,1,0]} = -\frac{-x}{1 + e^z}\Big|_{[-1,1,0]} = -\frac{1}{2}.$$

Alternativně můžeme první derivaci podle x resp. y spočíst derivací rovnice $F(x, y, z) = 0$ podle x resp. y. Při derivaci rovnice podle x uvažujeme, že z je funkce dvou proměnných x, y a y považujeme za konstantu, tj.

$$(z + e^z)_x = (xy + 2)_x \ \Rightarrow z_x + e^z z_x = y \ \Rightarrow z_x = \frac{y}{1 + e^z},$$

dosadíme bod $[-1, 1]$ a máme $z_x(-1, 1) = \frac{1}{2}$. Stejný postup platí pro derivaci rovnice podle y s tím rozdílem, že nyní za konstantu budeme uvažovat proměnnou x, tj.

$$(z + e^z)_y = (xy + 2)_y \ \Rightarrow z_y + e^z z_y = x \ \Rightarrow z_y = \frac{x}{1 + e^z}$$

a v bodě $[-1,1]$ dostáváme hodnotu $z_y(-1,1) = -\frac{1}{2}$.
Nyní zbývá spočíst druhé derivace, tedy z_{xx}, z_{xy} a z_{yy}. Podle věty 7.7 k jejich výpočtu využijeme již spočtené první derivace a budeme je derivovat ještě jednou buď podle x nebo podle y. Mějme na paměti, že uvažujeme z jako funkci dvou proměnných x, y. Při derivaci podle x vystupuje y jako konstanta a obráceně. Nejdříve vypočítáme derivaci z_{xx}, tj. derivujeme z_x podle x,

$$(z_x + e^z z_x)_x = y_x \quad \Rightarrow z_{xx} + e^z (z_x)^2 + e^z z_{xx} = 0 \quad \Rightarrow z_{xx} = -\frac{e^z (z_x)^2}{1 + e^z}.$$

Hodnota z_{xx} v bodě $[-1,1]$ je $z_{xx}(-1,1) = -\frac{1}{8}$.
Dále počítáme derivaci z_{xy}, tj. derivujeme z_x podle y,

$$(z_x + e^z z_x)_y = y_y \quad \Rightarrow z_{xy} + e^z z_y z_x + e^z z_{xy} = 1 \quad \Rightarrow z_{xy} = \frac{1 - e^z z_y z_x}{1 + e^z}.$$

Hodnota z_{xy} v bodě $[-1,1]$ je $z_{xy}(-1,1) = \frac{5}{8}$.
Zbývá spočíst derivaci z_{yy}, tj. derivujeme z_y podle y,

$$(z_y + e^z z_y)_y = x_y \quad \Rightarrow z_{yy} + e^z (z_y)^2 + e^z z_{yy} = 0 \quad \Rightarrow z_{yy} = -\frac{e^z (z_y)^2}{1 + e^z}.$$

Hodnota z_{yy} v bodě $[-1,1]$ je $z_{yy}(-1,1) = -\frac{1}{8}$.
S ohledem na Schwarzovu větu není potřeba počítat derivaci z_{yx}.

Jelikož jsme spočetli první i druhé parciální derivace, můžeme funkci $z = f(x,y)$ nahradit Taylorovým polynomem druhého řádu se středem v bodě $[x_0, y_0] = [-1,1]$. Taylorův polynom $T_2(x,y)$ má tvar

$$T_2(x,y) = f(-1,1) + f_x(-1,1)(x-1) + f_y(-1,1)(y-1) +$$
$$+ \frac{1}{2}[f_{xx}(-1,1)(x-1)^2 + 2f_{xy}(-1,1)(x-1)(y-1) + f_{yy}(-1,1)(y-1)^2],$$

tudíž

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(y-1) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{5}{4}(x+1)(y-1) - \frac{1}{8}(y-1)^2\right]. \end{aligned}$$

Příklad 7.17. Ověřte, že rovnice $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20$ zadává v okolí bodu $[1,2,3]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x,y)$, a najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v tomto bodě.

Řešení. Pro funkci $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 20$ a $[x_0, y_0, z_0] = [1, 2, 3]$ ověříme předpoklady věty 7.6. Platí $F(1, 2, 3) = 1 + 4 + 9 + 6 - 20 = 0$. Dále

$$F_z(x, y, z) = 2z + xy \quad \Rightarrow \quad F_z(1, 2, 3) = 8 \neq 0.$$

Rovnice $x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 20 = 0$ v okolí bodu $[1, 2, 3]$ implicitně zadává právě jednu funkci $z = f(x, y)$ takovou, že $f(1, 2) = 3$. Rovnice tečné roviny k funkci $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ má tvar

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Určíme parciální derivace funkce z derivováním funkce $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 20$ podle x, y a podle z pomocí vztahu (7.2), tj.

$$z_x = f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x + yz}{2z + xy}, \quad z_y = f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y + xz}{2z + xy}.$$

Hodnoty parciálních derivací v bodě $[1, 2]$ tedy jsou

$$z_x(1, 2) = f_x(1, 2) = -\frac{2x + yz}{2z + xy}\bigg|_{[1,2,3]} = -1,$$

$$z_y(1, 2) = f_y(1, 2) = -\frac{2y + xz}{2z + xy}\bigg|_{[1,2,3]} = -\frac{7}{8}.$$

Vypočtené hodnoty derivací v bodě $[1, 2]$ dosadíme do vzorce pro tečnou rovinu a získáváme

$$z - 3 = -(x - 1) - \frac{7}{8}(y - 2),$$

po úpravě

$$x + \frac{7}{8}y + z - \frac{23}{4} = 0.$$

Řešení: Pro nalezeni tečny využijeme větu 5.3.3. Vypočítejme nejdříve obě parciální derivace funkce $F(x,y) = xy + \ln y - 1$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = y\Big|_{[1,1]} = 1,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = x + \frac{1}{y}\Big|_{[1,1]} = 2.$$

Dosadíme,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0 \Rightarrow 1(x-1) + 2(y-1) = 0,$$

rovnice tečny pak bude mít tvar

$$t: \quad x + 2y - 3 = 0.$$

Pro určení rovnice normály dosadíme do

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0 \Rightarrow 2(x-1) - 1(y-1) = 0,$$

rovnice normály pak bude mít tvar

$$n: \quad 2x - y - 1 = 0.$$

10

Příklad 5.3.6. Nalezněte rovnici tečné roviny v bodě $[1,-2,4]$ ke grafu implicitní funkce $z = f(x,y)$ určené rovnicí

$$x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7 = 0.$$

Řešení: Pro nalezeni rovnice tečny využijeme vetu 5.3.6. Nejdříve určíme hodnoty jednotlivých parciálních derivací funkce

$$F(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7$$

v bodě $[1,-2,4]$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,-2,4) = 2x + 2\Big|_{[1,-2,4]} = 4,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,-2,4) = 6y - 12\Big|_{[1,-2,4]} = -24,$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,-2,4) = -8z + 8\Big|_{[1,-2,4]} = -24.$$

Dosadíme do rovnice tečné roviny

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow\ 4(x-1)-24(y+2)-24(z-4)=0\ \Rightarrow\ 4x-24y-24z+44=0.$$

Rovnice tečné roviny pak bude

$$\tau:\quad x-6y-6z+11=0.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $x^2+y^2+y^3-xy=3$.

2. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $\cot(3y)=x^2y$.

3. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $2^{xy}-3^{x+y}=4$ v bodě $A=[1,2]$.

4. Vypočtěte derivace y', y'' implicitní funkce y dané rovnicí $\sin^2(xy)=0$ v bodě $[1,\pi]$.

5. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $\dfrac{x+2y+3z}{y+z}=x$.

6. Určete parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $e^{x^2y+2y^2z+3xz^2}=4$.

7. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z v bodě $A=[\frac{\pi^2}{8},5,0]$ dané rovnicí $\cos\sqrt{2x}+y^2z^3+2y=z$.

8. Nalezněte tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce y zadané implicitně rovnicí $\dfrac{x+y}{x-y}=2$ v bodě $A=[3,1]$.

9. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z zadané implicitně rovnicí $\sqrt{xy}-z+\ln(x^2+y^2)=0$ v bodě $[2,2,?]$.

10. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z zadané implicitně rovnicí $\ln(\cos(x^2+y^2+z^2))=5x+3yz+6z$ v bodě $A=[0,0,0]$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y+3y^2-x$, $y'=\frac{y-2x}{2y+3y^2-x}$.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (A)

LS 1997-98

Příklad 1 : Najděte řešení soustavy rovnic a spočtěte determinant soustavy.

$$\begin{aligned} x+2y+3z+4t&=1\\ 2x-2y+3z-3t&=-5\\ x+\ y+\ z+\ t&=5\\ 4x+3y-5z+2t&=3 \end{aligned}\ . \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[0,1]$;

$$f(x,y)=\sqrt{y+\sin x}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\sin(xy)+\cos(xy)=1$$

Ma

určuje v jistém okolí bodu $[\pi,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě π. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y)=x^4y \qquad M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^4+y^4\le 16, x\ge -1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (A)

LS 1997-98

Příklad A1 : Gaussovou eliminací obdržíme řešení $x=-3,\ y=13,\ z=2,\ t=-7$. Spočtěme determinant

$$\begin{vmatrix} 1&2&3&4\\ 2&-2&3&-3\\ 1&1&1&1\\ 4&3&-5&2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&1&1\\ 1&2&3&4\\ 2&-2&3&-3\\ 4&3&-5&2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&2&3\\ 0&-4&1&-5\\ 0&-1&-9&-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&2&3\\ 0&0&9&7\\ 0&0&-7&1 \end{vmatrix} = 58.$$

Příklad A2 : Funkce f je definována na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ \sin x + y \geq 0\}$. V bodech, kde $y + \sin x > 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}(y + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(y + \sin x)^{-\frac{1}{2}}.$$

V bodech kde $y+\sin x = 0$ nemůže parciální derivace f podle y existovat. Parciální derivace podle x může existovat jen v bodech tvaru $[3\pi/2 + 2k\pi, 1], k \in \mathbb{Z}$. Zkusme počítat podle definice

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(3\pi/2 + 2k\pi, 1) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(3\pi/2 + 2k\pi + t, 1) - f(3\pi/2 + 2k\pi, 1)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin(3\pi/2 + 2k\pi + t)}}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{t}.\end{aligned}$$

Poslední limita neexistuje protože limita zleva $(-1/\sqrt{2})$ se nerovná limitě zprava $(1/\sqrt{2})$. Parciální derivace funkce f existují pouze na vnitřku množiny M a jsou tam spojité. Proto v bodě $[0, 1]$ existuje totální diferenciál, a tedy tečná rovina, která má tvar

$$z = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (y - 1).$$

Příklad A3 : Položme

$$F(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \cos(xy) \cdot y - \sin(xy) \cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \cos(xy) \cdot x - \sin(xy) \cdot x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(\pi, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) = \pi \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{gathered}\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) = 1,\\ \cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - \sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) = 0,\\ -\sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + \cos(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x))\\ -\cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) = 0.\end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

Příklad A4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0,y]$; $y \in (-2,2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^4 + y^4 = 16, x > -1\}, \qquad H_2 = \{[-1,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^4 + y^4 - 16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y^3, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

(1) $$x^4 + y^4 = 16,$$

(2) $$4x^3y = \lambda 4x^3,$$

(3) $$x^4 = \lambda 4y^3.$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \pm 2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \quad \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \quad \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \quad \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$.

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1,y) = y, \qquad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \qquad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$ a minima v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (B)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnost matice A a rozhodněte, zda platí det $A = 0$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = |x^2 - y^2|. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

115

$$2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y) = 2x + 4y \qquad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \le 1, x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 3x + 2}{(x + 1)(x^2 + x + 1)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (B)

LS 1997-98

Příklad B1 : Převeďme matici A pomocí elementárních řádkových úprav na schodovitou matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & -8 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 8 & -103 & -134 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & 54, \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{63} \end{pmatrix}.$$

Matice A má hodnost 5, a je tedy regulární. Proto platí $\det A \neq 0$.

Příklad B2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech, kde $y^2 \neq x^2$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2y.$$

V bodech, kde $y^2 = x^2$, zkusme počítat parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ podle definice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{|(x+t)^2 - y^2|}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{|2xt + t^2|}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} |2x + t|. \end{aligned}$$

Poslední limita existuje, jen když $x = 0$, a je rovna nule. Vzhledem k symetrii funkce f ($f(x,y) = f(y,x)$) totéž platí pro $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 3 - 2 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y-2).$$

Příklad B3 : Položme

$$F(x,y) = 2x^4 y + x^3 + y^3 + xy - 1.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 8x^3y + 3x^2 + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^4 + 3y^2 + x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(1,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0,$$
$$8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$
$$24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)$$
$$+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad B4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M. Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0,\ y > 0\},$$
$$H_2 = \{[0,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle 0,1\rangle\},$$
$$H_3 = \{[x,0] \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle 0,1\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1$ na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

(1) $$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1,$$

(2) $$2 = \lambda\frac{1}{4}x^{-3/4},$$

(3) $$4 = \lambda\frac{1}{4}y^{-3/4}.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C)

LS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = \sqrt[3]{\log\left(\frac{x}{y}\right)}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

ne

$$\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y,z) = e^{-z^2}(x^2 + xy + y^2) \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\, x^2 + y^2 = 1, |z| \le 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (C)

LS 1997-98

Příklad C1 : Platí

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 29.$$

Příklad C2 : Funkce f je definována na množině $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ y > 0\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x < 0,\ y < 0\}$. V bodech $[x,y] \in \mathcal{D}(f)$, kde $x \neq y$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}\left(\log\frac{x}{y}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{3}\left(\log\frac{x}{y}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{y}$$

V bodech z definičního oboru, kde $y = x$, zkusme počítat parciální derivace podle definice

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,x) - f(x,x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{\log\left(\frac{x+t}{x}\right)}}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0}\sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{x}\right)}{\frac{t}{x}} \cdot \frac{\frac{t}{x}}{t^3}} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } x > 0, \\ -\infty & \text{pro } x < 0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(y,y+t) - f(y,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{\log\left(\frac{y}{y+t}\right)}}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} -\sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{y}\right)}{\frac{t}{y}} \cdot \frac{\frac{t}{y}}{t^3}} = \begin{cases} -\infty & \text{pro } y > 0, \\ +\infty & \text{pro } y < 0. \end{cases}$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -\sqrt[3]{\log 2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}} \cdot (x-1) - \frac{1}{6}\frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}} \cdot (y-2).$$

Příklad C3 : Položme

$$F(x,y) = \log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G (lze ukázat, že dokonce $G = \mathbb{R}^2$) obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+\cos(xy)} \cdot (2x - \sin(xy)\cdot y),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+\cos(xy)} \cdot (2y - \sin(xy)\cdot x) + 1.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x)))+\varphi(x)=0,$$

$$\frac{1}{x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x))}\cdot(2x+2\varphi(x)\varphi'(x)-\sin(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x)))+\varphi'(x)=0,$$

$$\frac{-1}{(x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x)))^2}\cdot(2x+2\varphi(x)\varphi'(x)-\sin(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x)))^2$$
$$+\frac{1}{x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x))}\cdot(2+2(\varphi'(x))^2+2\varphi(x)\varphi''(x)$$
$$-\cos(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2-\sin(x\varphi(x))(2\varphi'(x)+x\varphi''(x)))+\varphi''(x)=0.$$

Dosadíme-li $x=0$ a použijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=0$ a $\varphi''(0)=-2$.

Příklad C4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny M je prázdný. Z tvaru funkce f vyplývá, že

$$f(x,y,1)=f(x,y,-1)<f(x,y,z)<f(x,y,0),\qquad [x,y,z]\in\mathbb{R}^3,\ z\in(-1,1)\setminus\{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině $M\cap\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ z=0\}$ a minima na množině $M\cap\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ z=-1 \text{ nebo } z=1\}$. Položme $g(x,y)=x^2+xy+y^2$ a vyšetřujme extrémy g na množině $H=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $h(x,y)=x^2+y^2-1$. Platí $g,h\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce h platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=2x,\qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=2y.$$

Pro každé $[x,y]\in H$ máme $\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y),\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)\neq(0,0)$. Řešme následující soustavu

$$x^2+y^2=1, \tag{1}$$
$$2x+y=\lambda 2x, \tag{2}$$
$$x+2y=\lambda 2y. \tag{3}$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme

$$(3-2\lambda)(x+y)=0.$$

To znamená, že buď $x=-y$ nebo $\lambda=3/2$. V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body $[1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$. Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme $x=y$ a (1) dává podezřelé body $[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$. Funkce g nabývá minima na množině H v bodech $[1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$ a maxima v bodech $[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$.

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce f nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},-1],\ [1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},-1],\ [-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1],\ [1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},1]$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \min\{x^2 + y^2, 2 - x^2 - y^2\}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$x^y + y^x = 2y$$

11d

určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = xy + yz \qquad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Spočtěte

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad E1 : Platí:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -16 & -8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -16.$$

Příklad E2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro funkci f platí:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{pro } x^2+y^2 \le 1; \\ 2-x^2-y^2 & \text{pro } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

V bodech $[x,y]$, kde $x^2+y^2 \neq 1$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x^2+y^2 < 1; \\ -2x & \text{pro } x^2+y^2 > 1; \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{pro } x^2+y^2 < 1; \\ -2y & \text{pro } x^2+y^2 > 1; \end{cases}.$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $x^2+y^2=1$. Uvažujme bod $[x_0,y_0]$ takový, že $x_0^2+y_0^2=1$. Počítejme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{(x_0+t)^2+y_0^2, 2-(x_0+t)^2-y_0^2\}-1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{1+2x_0t+t^2, 1-2x_0t-t^2\}-1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{2x_0t+t^2, -2x_0t-t^2\}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} -|2x_0t+t^2|/t = \begin{cases} 0 & \text{pro } x_0 = 0 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x_0 \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii funkce f lze parciální derivaci podle y počítat analogicky.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2+y^2=1,\ x\neq 0\},$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2+y^2=1,\ y\neq 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -3 - 2\cdot(x-1) - 4\cdot(y-2).$$

Příklad E3 : Položme

$$F(x,y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$, která obsahuje bod $[1,1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} + y^x \log y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^y \log x + xy^{x-1} - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi''(x)\log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right) \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2 \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad E4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce g_1, g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ stejně jako funkce f. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1, \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 1, \\ &\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 1. \end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1,1,1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

(1) $$y = \lambda_1 2x + \lambda_2,$$

(2) $$x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2,$$

(3) $$y = \lambda_1 2z + \lambda_2,$$

(4) $$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

(5) $$x + y + z = 1.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad 1 : Nalezněte matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = (\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^4. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

11e)

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = z + e^{xy} \qquad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x + 1)(x^2 + 2x + 4)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad G1 : Standardním postupem obdržíme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&1&0&0&0\\0&1&0&4&1&0&-1&0\\0&2&1&2&1&1&0&0\\0&-5&-3&-3&-1&0&0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&1&3&1&0&0&0\\0&1&0&4&1&0&-1&0\\0&0&1&-6&-1&1&2&0\\0&0&-3&17&4&0&-5&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&1&0&0&0\\0&1&0&4&1&0&-1&0\\0&0&1&-6&-1&1&2&0\\0&0&0&-1&1&3&1&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&1&3&1&0&0&0\\0&1&0&4&1&0&-1&0\\0&0&1&-6&-1&1&2&0\\0&0&0&1&-1&-3&-1&-1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&1&0&4&9&3&3\\0&1&0&0&5&12&3&4\\0&0&1&0&-7&-17&-4&-6\\0&0&0&1&-1&-3&-1&-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&0&0&11&26&7&9\\0&1&0&0&5&12&3&4\\0&0&1&0&-7&-17&-4&-6\\0&0&0&1&-1&-3&-1&-1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&2&1&1\\0&1&0&0&5&12&3&4\\0&0&1&0&-7&-17&-4&-6\\0&0&0&1&-1&-3&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Platí tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&1&1\\5&12&3&4\\-7&-17&-4&-6\\-1&-3&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Příklad G2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x,y] \neq [0,0]$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{x}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{y}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

V bodě $[0,0]$ spočítáme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\operatorname{arctg}(\sqrt{t^2}))^4}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}(|t|)}{|t|}\right)^4 \cdot \frac{|t|^4}{t} = 0.$$

Vzhledem k symetrii funkce f platí také $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = (\operatorname{arctg}\sqrt{5})^4 + \frac{2}{3}(\operatorname{arctg}\sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x-1) + \frac{4}{3}(\operatorname{arctg}\sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (y-2).$$

Příklad G3 : Položme

$$F(x,y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot x - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) = 0,$$
$$e^{\sin x^2} \cdot (\cos x^2 \cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2} \cdot \sin x^2 \cdot 4x^2$$
$$+e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)} (\cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2$$
$$-e^{\sin x\varphi(x)} \sin x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x))$$
$$-2\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$.

Příklad G4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Funkce f, g_1 i g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{xy}y, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{xy}x, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 2y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = -2z.$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(2x, 2y, -2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \tag{1}$$
$$e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \tag{2}$$
$$1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{4}$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{5}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnost matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, určete kde existují vlastní parciální derivace a spočtěte je; napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x \cos y) & x \geq 0 \\ \cos(x \sin y) + 2 & x < 0 \end{cases}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

11 £)

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$$
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = y^2 + z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad H1 : Pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnost matice, dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & x & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & x - 2 & x - 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud $x = 2$, pak $h(A) = 3$. V případě, že $x \neq 2$, pak lze číslem $x - 2$ dělit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{x-1}{x-2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Poslední řádek je nulový, právě když $\frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} = 0$, tj. právě když $x = 7$.

Závěr: $h(A) = 2$ pro $x = 7$, $h(A) = 3$ pro $x \neq 7$.

Příklad H2 : Okamžitě vidíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Pokud $x \neq 0$ lze v bodě $[x, y]$ počítat parciální derivace „podle vzorečků“.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \cos(x \cos y) \cdot \cos y & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot \sin y & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \cos(x \cos y) \cdot (-x \sin y) & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot (x \cos y) & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

V bodech tvaru $[0, y]$ budeme počítat parciální derivace „z definice“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,y) - f(t,0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,y)}{t}$$

Tato limita ovšem neexistuje, protože limita zleva $(-\infty)$ se nerovná limitě zprava $(\cos y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{t \to y} \frac{f(0,t) - f(0,y)}{t - y} = \lim_{t \to y} \frac{0}{t - y} = 0.$$

V bodě $[1, 2]$ jsou obě parciální derivace spojité, a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \cos(\cos 2) \cdot \cos 2 \cdot (x - 1) - \cos(\cos 2) \cdot \sin 2 \cdot (y - 2) + \sin(\cos 2).$$

Příklad H3 : Položme

$$F(x,y) = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2).$$

Bod $[0, 0]$ je ve vnitřku definičního oboru funkce F - můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce F na jistém okolí G bodu $[0, 0]$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}.$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu $[0, 0]$ spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\arcsin(x+(\varphi(x))^2)+\pi/2-\arccos(\varphi(x)+x^2)=0,$$
$$\frac{1+2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1-(x+(\varphi(x))^2)^2}}+\frac{\varphi'(x)+2x}{\sqrt{1-(\varphi(x)+x^2)^2}}=0,$$
$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2(x+(\varphi(x))^2))\cdot(1+2\varphi(x)\varphi'(x))^2\\ +(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2(\varphi'(x))^2+2\varphi(x)\varphi''(x))\\ -\frac{1}{2}(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2(\varphi(x)+x^2))\cdot(\varphi'(x)+2x)^2\\ +(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(\varphi''(x)+2)=0.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x=0$ a využijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=-1$ a $\varphi''(0)=-4$.

Příklad H4 : Položme

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1, \qquad g_2(x,y,z)=x-y^2-z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^n$ vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f,\ g_1,\ g_2\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+2z & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)=2x & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)=1\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)=2y & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)=-2y\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y)=2x+1 & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y)=2z & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y)=-2z
\end{array}$$

Zkoumejme pro která $[x,y,z]\in M$ jsou vektory $(2x,2y,2z),\ (1,-2y,-2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnost následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix}1 & -2y & -2z\\ 2x & 2y & 2z\end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix}1 & -2y & -2z\\ 2x+1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je menší než 2, právě když $x=-\frac{1}{2}$ nebo $y=z=0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (I)

LS 1997-98

Příklad 1 : Řešte soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y - 1}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\operatorname{arctg}(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (I)

LS 1997-98

Příklad I1 : Napišme si rozšířenou matici $(A|b)$ a proveďme Gaussovu eliminaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno spočteme: $x_1 = -2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -3.$

Příklad I2 : Pro definiční obor platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x+y=1\}$. Pro parciální derivace platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{xy - x - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad [x,y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0,0]\};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy - x^2 - y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad [x,y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0,0]\}.$$

V bodě $[0,0]$ počítejme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{t^2}}{t-1}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{(t-1)t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sgn} t}{t-1}.$$

Poslední limita neexistuje, protože limita zleva je rovna 1 a zprava je rovna -1. To znamená, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neexistuje. Naprosto stejným postupem lze ukázat, že ani $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje.

V bodě $[1,2]$ jsou obě parciální derivace spojité a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \frac{-3}{4\sqrt{5}} \cdot (x-1) - \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot (y-2) + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Příklad I3 : Položme

$$F(x,y) = \operatorname{arctg}(y^2 + xy) - e^{xy} + \cos x - y.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}y - \sin x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2y+x}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}x - 1.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy

$\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\operatorname{arctg}((\varphi(x))^2 + x\varphi(x)) - e^{x\varphi(x)} + \cos x - \varphi(x) = 0.$$

$$\frac{2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x)}{1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))e^{x\varphi(x)} - \sin x - \varphi'(x) = 0,$$

$$\frac{-2((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))}{(1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2)^2} \cdot (2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x))^2$$
$$+ \frac{2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) + \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x)}{1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2}$$
$$-(\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x))e^{x\varphi(x)} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 e^{x\varphi(x)}$$
$$- \cos x - \varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -1$.

Příklad I4 : Množina M je uzavřená a omezená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu a uzavřeného prvního kvadrantu) – je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a proto musí nabývat maxima i minima na množině M. Zkoumejme chování funkce f nejprve na vnitřku množiny M.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Uvnitř množiny M jsou obě parciální derivace funkce f nenulové, proto uvnitř M není žádný podezřelý bod. Hranici množiny M rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x,0];\ x \in \langle 0,1\rangle\},$$
$$H_2 = \{[0,y];\ y \in \langle 0,1\rangle\},$$
$$H_3 = \{[x,y];\ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Je-li $[x,y] \in H_1$, platí $f(x,y) = \operatorname{arctg} x$. Funkce arctg je rostoucí a proto podezřelými body jsou $[0,0]$ a $[1,0]$. Podobně je tomu na množině H_2. Tam dostáváme podezřelé body $[0,0]$ a $[0,1]$. Na H_3 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Nechť $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Vidíme, že $f,\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Vektor $(2x, 2y)$ je nulový, právě když $[x,y] = [0,0]$ – tento bod ovšem neleží v H_3. Nyní je třeba vyřešit následující soustavu

(1) $$x^2 + y^2 = 1$$

(2) $$\frac{1}{1+x^2} = \lambda 2x$$

(3) $$\frac{1}{1+y^2} = \lambda 2y$$