10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}$, $[\bar{x}, \bar{y}] \in G$ a nechť platí:

1. $F \in C^1(G)$
2. $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0.$

Pak existuje okolí bodu $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\bar{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\bar{y}$ tak, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$ a píšeme-li $y = \varphi(x)$, pak $\varphi \in C^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

kde $j \in \{1, \ldots, n\}$, $x \in U$.

Příklady

1. Ukažte, že rovnice $(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$ určuje na okolí bodu $[0, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.
2. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$ určuje na okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1.
3. Ukažte, že rovnice $x^2 + xy^2 - y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[-2, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě -2.
4. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2} \sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\pi, \pi]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Najděte rovnici tečny v bodě $[\pi, \pi]$.
5. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2} \sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Určete, zda graf této funkce leží na okolí daného bodu pod tečnou nebo nad tečnou.
6. K rovnici $-x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$ najděte body, v nichž jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci a které jsou stacionárními body takto implicitně definovaných funkcí jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lok. extrémy.
7. Ukažte, že rovnice $\ln(x^2 z^3) = e^{z \cos y} - 1$ určuje na okolí bodu $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ implicitně zadanou funkci $z(x, y)$. Vypočtěte její parciální derivace 1. řádu a určete jejich hodnotu v daném bodě.

8. Ukažte, že rovnice $z+e^z = xy+2$ určuje na okolí bodu $[-1,1,0]$ implicitně zadanou funkci $z(x,y)$. Vypočtěte její parciální derivace 1. a 2. řádu v daném bodě.

9. Ukažte, že rovnice $x^2+y^2+z^2+xyz = 20$ určuje na okolí bodu $[1,2,3]$ implicitně zadanou funkci $z(x,y)$. Najděte rovnici tečné roviny v daném bodě.

10. Ukažte, že rovnice $x^2+3y^2-4z^2+2x-12y+8z-7=0$ určuje na okolí bodu $[1,-2,4]$ implicitně zadanou funkci $z(x,y)$. Najděte rovnici tečné roviny v daném bodě.

Zkouškové příklady

11. Ukažte, že daná rovnice určeuje na okolí bodu $[\bar{x},\bar{y}]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě $\bar{x}$.

    (a) $\sin(xy)+\cos(xy)=1, [\bar{x},\bar{y}]=[\pi,0]$
    (b) $2x^4y+x^3+y^3+xy=1, [\bar{x},\bar{y}]=[1,0]$
    (c) $\ln(x^2+y^2+\cos(xy))+y=0, [\bar{x},\bar{y}]=[0,0]$
    (d) $x^y+y^x=2y, [\bar{x},\bar{y}]=[1,1]$
    (e) $e^{\sin x^2}+e^{\sin xy}=2y+2, [\bar{x},\bar{y}]=[0,0]$
    (f) $\pi/2+\arcsin\,(x+y^2)=\arccos\,(y+x^2), [\bar{x},\bar{y}]=[0,0]$
    (g) $\arctan\,(y^2+xy)=e^{xy}-\cos x+y, [\bar{x},\bar{y}]=[0,0]$