9. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť $G \subset \mathbb{R}^s$ a $H \subset \mathbb{R}^r$ jsou otevřené množiny. Nechť funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in C^1(G)$ a $f \in C^1(H)$.

Definujme funkci $F : G \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x))$. Pak $F \in C^1(G)$.

Pro $a \in G$ označme $b = [\varphi_1(a), \ldots, \varphi_r(a)]$. Pak pro $j = 1, \ldots, s$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

Zkouškové příklady

1. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2y^3}{4x^2 + y^2}, & [x, y] \neq [0, 0] \\ 0, & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

   Vyšetřete, ve kterých bodech $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ má funkce f totální diferenciál a spočtěte ho.

2. Nechť $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y, z) = (x^2 y + y + xz^2, (z + 1)e^{xy}.$$

   Zobrazení $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ má v bodě $(0, 1)$ derivaci reprezentovanou maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Ukažte, že v bodě $(0, 0, 0)$ existuje derivace zobrazení $G \circ F$ a spočtěte její reprezentující matici.

   (b) Spočtěte derivaci funkce F_1 v bodě $(0, 0, 0)$ podle vektoru $(1, -1, 1)$.

3. Nechť funkce $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je definována předpisem

$$F(x, y) = \begin{cases} (x \sin y \sin z, x^2 \sin \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}), & [x, y, z] \neq [0, 0, 0] \\ 0, & [x, y, z] = [0, 0, 0]. \end{cases}$$

   (a) Ukažte, že v bodě $(\pi, 1, 0)$ existuje derivace F' a najděte její reprezentující matici.

(b) Spočtěte derivaci funkce $\frac{\partial F_2}{\partial x}[0,0,0]$

4. Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos\,(x - \cos y),$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce v bodě $[1, 0, f(1, 0)]$.

5. Nechť funkce $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je definována předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} ((x^2+y^2)(e^x-1), \frac{x^2}{x^2+y^2}, & [x,y] \neq [0,0] \\ 0, & [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

a $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované předpisem

$$G(s,t) = st.$$

(a) Dokažte, že v bodě $[1, 1]$ existuje derivace F, spočtěte její reprezentující matici a jakobián.

(b) Spočtěte $\frac{\partial(G\circ F)}{\partial x}(0,-3)$ a $\frac{\partial(G\circ F)}{\partial y}(0,-3)$, pokud existují.

6. Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{1-\sqrt[3]{x}}{|y| + \sqrt[3]{x}}$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce v bodě $[-1, 3, f(-1, 3)]$.