

Příklad 5.6. Uvažujme funkci $z = x^4 y^6 \cos(x^3 + y^3)$. Navrhněte, jak by mohly vypadat její vnitřní složky a vnější složka, pokud bychom tuto funkci chtěli chápat jako složenou funkci.

Řešení. Ve světle úvah prováděných v předcházejícím příkladě můžeme např. položit

$$u = g(x, y) = x^4 y^6 \quad v = h(x, y) = x^3 + y^3.$$

Odtud dostáváme, že vnější složkou je funkce $z = f(u, v) = u \cos v$.

Můžeme ale také zvolit

$$u = g(x, y) = x^2 y^3 \quad v = h(x, y) = x^3 + y^3.$$

Pak by vnější složka složené funkce měla tvar $z = f(u, v) = u^2 \cos v$.

Jaké další možnosti vás napadají?

1a)

Příklad 5.7. Vypočtěte derivaci složené funkce $z = u\sqrt{1+v^2}$, kde $u = e^{2x}$, $v = e^{-x}$.

Řešení. V tomto případě je proměnná z funkcí proměnné x . Máme tedy vypočítat obyčejnou derivaci funkce jedné proměnné pomocí pravidla pro derivování složené funkce. Využijeme vztahu

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx},$$

který v našem případě dává

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \sqrt{1+v^2} \cdot 2e^{2x} + \frac{uv}{\sqrt{1+v^2}} \cdot (-e^{-x}) = \\ &= \frac{(1+e^{-2x})2e^{2x} - 1}{\sqrt{1+e^{-2x}}} = \frac{2e^{2x} + 1}{\sqrt{1+e^{-2x}}}. \end{aligned}$$

15)

Příklad 5.8. Vypočtěte derivaci složené funkce $z = uv^2w^3$, kde $u = \sin x$, $v = -\cos x$, $w = e^x$.

Řešení. Opět se jedná o výpočet obyčejné derivace funkce jedné proměnné pomocí pravidla pro derivování složené funkce. Využijeme vztahu

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dx},$$

který nyní dává

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= v^2 w^3 \cdot \cos x + 2uvw^3 \cdot \sin x + 3uv^2 w^2 \cdot e^x = \\ &= e^{3x} \cos x (\cos^2 x - 2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x) = e^{3x} \cos x (\cos^2 x - 2 \sin^2 x + \frac{3}{2} \sin 2x).\end{aligned}$$

Příklad 5.9. Vypočtete parciální derivace složené funkce $z = \sin u \cos v$, kde $u = (x - y)^2$, $v = x^2 - y^2$ podle proměnných x a y .

Řešení. Pro výpočet využijeme vztahů ve větě 5.3, podle kterých máme nejdříve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

a odtud

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \cos u \cos v \cdot 2(x - y) + (-\sin u \sin v) \cdot 2x = \\ &= 2x \cos(u + v) - 2y \cos u \cos v.\end{aligned}$$

Parciální derivaci podle y vypočteme podle vztahu

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \cos u \cos v \cdot (-2)(x - y) + (-\sin u \sin v) \cdot (-2y) = \\ &= 2y \cos(u - v) - 2x \cos u \cos v.\end{aligned}$$

Příklad 5.10. Vypočtete parciální derivace složené funkce $w = yz^2 - x^3$, kde $x = e^{r-t}$, $y = \ln(r + 2s + 3t)$ a $z = \sqrt{rs + t}$ podle proměnných r , s a t .

Řešení. Pro výpočet využijeme vztahů ve větě 5.4, kdy $m = n = 3$. Máme

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = -3x^2 \cdot e^{r-t} + z^2 \cdot \left(\frac{1}{r + 2s + 3t} \right) +$$

1d)

$$+2yz \cdot \left(\frac{s}{2\sqrt{rs+t}} \right) = -3e^{3(r-t)} + \frac{rs+t}{r+2s+3t} + s \ln(r+2s+3t).$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = -3x^2 \cdot 0 + z^2 \cdot \left(\frac{2}{r+2s+3t} \right) +$$

$$+2yz \cdot \left(\frac{r}{2\sqrt{rs+t}} \right) = \frac{2(rs+t)}{r+2s+3t} + r \ln(r+2s+3t).$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -3x^2 \cdot (-e^{r-t}) + z^2 \cdot \left(\frac{3}{r+2s+3t} \right) +$$

$$+2yz \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{rs+t}} \right) = 3e^{3(r-t)} + \frac{3(rs+t)}{r+2s+3t} + \ln(r+2s+3t).$$

Příklad 5.11. Je dáno $g(x, y) = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$, přičemž o funkci f předpokládáme, že je diferencovatelná. Ukažte, že funkce g vyhovuje rovnici

$$y \frac{\partial g}{\partial x} + x \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Řešení. Položme $u = x^2 - y^2$ a $v = y^2 - x^2$. Potom na základě pravidla pro derivování složené funkce obdržíme

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} (-2x),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (-2y) + \frac{\partial f}{\partial v} (2y).$$

Odtud vyplývá

$$y \frac{\partial g}{\partial x} + x \frac{\partial g}{\partial y} = \left(2xy \frac{\partial f}{\partial u} - 2xy \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \left(-2xy \frac{\partial f}{\partial u} + 2xy \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0.$$

Příklad 5.12. Je-li dán tlak v kilopascálech, objem v litrech a teplota ve stupních Kelvina jednoho molu ideálního plynu, pak jsou tyto tři veličiny svázány vztahem $PV = 8,31T$. Určete, jak rychle se mění v daném okamžiku

je podle věty o derivaci součinu a věty o derivaci složené funkce

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= nx^{n-1}f + x^n \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = nx^{n-1}f - \frac{yx^{n-2}}{a} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x^n \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{x^{n-1}}{a} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x^n z}{by^2} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= x^n \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{x^n}{by} \frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

Po dosazení do dané rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} &= x \left(nx^{n-1}f - \frac{yx^{n-2}}{a} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + y \left(\frac{x^{n-1}}{a} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x^n z}{by^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{x^n z}{by} \frac{\partial f}{\partial v} = \\ &= nx^n f(u, v) = nF(x, y, z).\end{aligned}$$

Ukažte, že funkce $F(x, y, z) = \frac{xy}{z} \ln x + xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, kde f je spojitě diferencovatelná funkce, vyhovuje vztahu

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = F + \frac{xy}{z}$$

Řešení: Označme $u = \frac{y}{x}$ a $v = \frac{z}{x}$. Pak je podle věty o derivaci složené funkce

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{z}{x^2} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f(u, v)}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f(u, v)}{\partial z} = \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Z toho dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{y \ln x}{z} + \frac{y}{z} + f - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{z}{x} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{x \ln x}{z} + \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= -\frac{xy \ln x}{z^2} + \frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

Když dosadíme tyto derivace do dané rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned}x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} &= x \left(\frac{y \ln x}{z} + \frac{y}{z} + f - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{z}{x} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + y \left(\frac{x \ln x}{z} + \frac{\partial f}{\partial u} \right) + z \left(-\frac{xy \ln x}{z^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \\ &= \frac{xy}{z} + \frac{xy \ln x}{z} + xf(u, v) = \frac{xy}{z} + F(x, y, z).\end{aligned}$$

Napište Taylorův rozvoj funkce

$$f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$$

v bodě $(0, 0)$.

Řešení: Protože je $\frac{d^k e^x}{dx^k} = e^x$ a pro $\ell \geq 1$ platí (dokáže se indukcí)

$$\frac{d^\ell \ln(1 + y)}{dy^\ell} = \frac{(-1)^{\ell-1} (\ell-1)!}{(1+y)^\ell},$$

11. Derivování složených funkcí

V tomto oddíle si ukážeme základní metody použití věty o derivaci složené funkce více proměnných. Začneme tím, že připomeneme znění této věty (viz [D2, Věta 189]).

Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ jsou funkce s proměnných, které mají v bodě $a \in \mathbb{R}^s$ totální diferenciál. Položme $b = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a))$. Je-li f funkce r proměnných, která má totální diferenciál v bodě b , potom funkce (s proměnných) definovaná předpisem $F(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))$ má totální diferenciál v bodě a a pro $j = 1, \dots, s$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

§73. Nejjednodušším použitím je **přímá aplikace** na výpočet parciálních derivací složené funkce (případně též derivací ve směru či totálního diferenciálu).

3 Příklad Nechť funkce f má vlastní derivaci v každém bodě \mathbb{R} . Položme $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vyjádřete parciální derivace prvního řádu funkce g pomocí derivace funkce f .

4 Řešení. Protože f má vlastní derivaci, má i totální diferenciál v každém bodě \mathbb{R} . Navíc funkce $x^2 + y^2$ má zřejmě spojité parciální derivace prvního řádu (uvědomte si, že funkce $(x, y) \mapsto 2x$ a $(x, y) \mapsto 2y$ jsou spojité na \mathbb{R}^2), a tedy má totální diferenciál v každém bodě (viz §54). Proto má g totální diferenciál a platí $\frac{\partial g}{\partial x} = f'(x^2 + y^2) \cdot 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = f'(x^2 + y^2) \cdot 2y$ na celém \mathbb{R}^2 . ■

Příklad Nechť funkce $f = f(u, v)$ je třídy C^2 na okolí bodu $(a + b, a - b)$. Položme $g(x, y) = f(x + y, x - y)$. Vyjádřete $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a, b)$ pomocí derivací funkce f .

Řešení. Funkce $x + y$ i $x - y$ jsou třídy C^1 na \mathbb{R}^2 , mají tedy totální diferenciál v každém bodě. Funkce f má totální diferenciál na okolí bodu $(a + b, a - b)$, platí tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(x + y, x - y) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y, x - y) \cdot 1 = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(x + y, x - y) + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y, x - y) \end{aligned}$$

na okolí bodu (a, b) . Dále funkce $\frac{\partial f}{\partial u}$ a $\frac{\partial f}{\partial v}$ mají totální diferenciál v bodě $(a + b, a - b)$ (protože mají spojité parciální derivace prvního řádu na okolí tohoto bodu), a tedy

24.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a, b) &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a+b, a-b) - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a+b, a-b) + \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(a+b, a-b) - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a+b, a-b) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a+b, a-b) - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a+b, a-b). \end{aligned}$$

■

P ř í k l a d Necht $f = f(t, u)$ má totální diferenciál v bodě $(1, 1)$ a splňuje $f(1, 1) = 1$. Spočtete $\frac{\partial g}{\partial t}(1, 1)$ pomocí derivací funkce f , je-li

$$g(t, u) = f(f(t, u)^{f(u, t)}, f(u, t)^{f(t, u)}).$$

Řešení. Funkce $(t, u) \mapsto f(t, u)$ má totální diferenciál v bodě $(1, 1)$ podle zadání, funkce $(t, u) \mapsto f(u, t)$ má totální diferenciál v bodě $(1, 1)$ podle výše uvedené věty (aplikované pro $\varphi_1(t, u) = u$ a $\varphi_2(t, u) = t$). Tedy i funkce $f(t, u)^{f(u, t)}$ a $f(u, t)^{f(t, u)}$ mají totální diferenciál v bodě $(1, 1)$ (užíváme definici obecné mocniny, podle níž $f(t, u)^{f(u, t)} = \exp(f(u, t) \log f(t, u))$ a podobně v druhém případě). Protože navíc $f(1, 1)^{f(1, 1)} = 1$, má podle výše uvedené věty totální diferenciál v bodě $(1, 1)$ i funkce g . Navíc platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(1, 1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(f(t, u)^{f(u, t)}, f(u, t)^{f(t, u)}) \cdot f(t, u)^{f(u, t)} \right. \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, t) \log f(t, u) + \frac{f(u, t)}{f(t, u)} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t, u) \right) + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial u}(f(t, u)^{f(u, t)}, f(u, t)^{f(t, u)}) \cdot \\ &\quad \cdot \left. f(u, t)^{f(t, u)} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, u) \log f(u, t) + \frac{f(t, u)}{f(u, t)} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(u, t) \right) \right)_{\substack{t=1 \\ u=1}} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(1, 1) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) \right)^2. \end{aligned}$$

Značení použité v tomto výpočtu může být poněkud matoucí. Uvádíme ho proto, že se s takovým značením čtenář může setkat i jinde, a je tedy užitečné mu rozumět. Nejasnosti mohou vzniknout z toho, že písmena t, u se používají ve dvou různých významech. Jednak označují první a druhou proměnnou funkce f (a také g), tedy $\frac{\partial f}{\partial t}$ znamená derivace funkce f podle první proměnné, $\frac{\partial f}{\partial u}$ derivaci funkce f podle druhé proměnné. A potom označují čísla, která do výrazu dosazujeme. Takže $\frac{\partial f}{\partial u}(u, t)$ označuje derivaci funkce f podle druhé proměnné v bodě (u, t) (čili $\partial_2 f(u, t)$), nikoli derivaci výrazu $f(u, t)$ podle u (tu bychom značili $\frac{\partial}{\partial u}(f(u, t))$ a

Functions of two variables, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

The chain rule for change of coordinates in a plane.

Theorem

If the functions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ and the change of coordinate functions $x, y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ are differentiable, with $x(t, s)$ and $y(t, s)$, then the function $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ given by the composition $\hat{f}(t, s) = f(x(t, s), y(t, s))$ is differentiable and holds

$$\hat{f}_t = f_x x_t + f_y y_t$$

$$\hat{f}_s = f_x x_s + f_y y_s.$$

Remark: We denote by $f(x, y)$ the function values in the coordinates (x, y) , while we denote by $\hat{f}(t, s)$ are the function values in the coordinates (t, s) .

Functions of two variables, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

The chain rule for change of coordinates in a plane.

Example

Given the function $f(x, y) = x^2 + 3y^2$, in Cartesian coordinates (x, y) , find the derivatives of f in polar coordinates (r, θ) .

Solution: The relation between Cartesian and polar coordinates is

$$x(r, \theta) = r \cos(\theta), \quad y(r, \theta) = r \sin(\theta).$$

The function f in polar coordinates is $\hat{f}(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$.

The chain rule says $\hat{f}_r = f_x x_r + f_y y_r$ and $\hat{f}_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta$, hence

$$\hat{f}_r = \underline{2x \cos(\theta) + 6y \sin(\theta)} \Rightarrow \underline{\hat{f}_r = 2r \cos^2(\theta) + 6r \sin^2(\theta)}.$$

$$\hat{f}_\theta = \underline{-2xr \sin(\theta) + 6yr \cos(\theta)},$$

$$\hat{f}_\theta = \underline{-2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + 6r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}. \quad \triangleleft$$

♣ **Example #1**

Q: The elevation of a hill is described by

$$z = z(x, y) = \exp \{-(x^2 + y^2)\} . \quad (3.20)$$

By deriving the function in plane polars, find $\partial z/\partial r$ and $\partial z/\partial \phi$ and comment on their values. Determine the value of r where the hill is steepest.

A: Plane polars are (r, ϕ) where $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$.

This is old in terms of new, and we know the function, \Rightarrow CASE 1A.

The hill is therefore

$$z = \exp \{-r^2\} . \quad (3.21)$$

So

$$\frac{\partial z}{\partial r} = -2r \exp \{-r^2\} \quad \text{and} \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0 . \quad (3.22)$$

The change of height is all in the radial direction. $\partial z/\partial \phi = 0$ means that if you move at constant r (that is, "round" the hill) you will not change height at all.

The gradient is a function of r alone, so we can find the total derivative

$$\frac{d}{dr} \text{Slope} = \frac{d}{dr} (-2r \exp \{-r^2\}) = (-2 + 4r^2) \exp \{-r^2\} \quad (3.23)$$

This is zero when $r = 1/\sqrt{2}$ and $\text{Slope} = -\sqrt{2} \exp \{-1/2\}$.

♣ **Example #2.**

Here is one that can be solved using all approaches.

Q: Find the partial derivatives $\partial f/\partial u$ and $\partial f/\partial v$ when

$$f = f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{and} \quad u = (x + y) \quad v = (x - y) . \quad (3.24)$$

A: Transformation is new in terms of old. \Rightarrow CASE 2.

Try CASE 2A: Can we invert the transformation? Yes! Adding then subtracting we find

$$x = \frac{1}{2}(u + v) \quad y = \frac{1}{2}(u - v) . \quad (3.25)$$

Now goto CASE 1. We know the function, \Rightarrow **CASE 1A.**

$$f = F(u, v) = x^2 - y^2 = \frac{1}{4} ((u + v)^2 - (u - v)^2) = uv \quad (3.26)$$

je

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, y) = e^x \ln(1+y), \quad \frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial x^k \partial y^\ell}(x, y) = e^x \frac{(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!}{(1+y)^\ell} \quad \text{pro } \ell > 0.$$

Z toho dostanu

$$\frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial x^k \partial y^\ell}(0, 0) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ell = 0, \\ (-1)^{\ell-1}(\ell-1)! & \text{pro } \ell > 0. \end{cases}$$

Tedy n -tý diferenciál funkce $f(x, y)$ v bodě $[0; 0]$ je

$$d^n f(0, 0; x, y) = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\ell} \partial y^\ell}(0, 0) x^{n-\ell} y^\ell = \sum_{\ell=1}^n \frac{n!}{\ell \cdot (n-\ell)!} x^{n-\ell} y^\ell$$

A Taylorův rozvoj funkce $f(x, y)$ v bodě $[0; 0]$ je podle definice

$$T_f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n f(0, 0; x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^n \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell \cdot (n-\ell)!} x^{n-\ell} y^\ell = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell \cdot k!} x^k y^\ell.$$

7

Nechť funkce f a g mají spojité derivace druhého řádu. Dokažte, že funkce $F(x, y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení: Máme najít druhé derivace funkce $F(x, y) = xf(u) + yg(u)$, kde $u = x + y$. Protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 1,$$

jsou podle věty o derivaci složené funkce první derivace rovny

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f + xf' + yg', \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xf' + g + yg'$$

a pro druhé derivace snadno dostaneme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2f' + xf'' + yg'', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f' + xf'' + g' + yg'', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = xf'' + 2g' + yg''$$

A po dosazení do dané rovnice získáme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2f' + xf'' + yg'' - 2(f' + xf'' + g' + yg'') + xf'' + 2g' + yg'' = 0.$$

Laplaceův operátor

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

v \mathbb{R}^n vyjádřete pro funkci, která závisí pouze na vzdálenosti bodu $x = (x_1, \dots, x_n)$ od počátku souřadnicové soustavy, tj.

$$f(x_1, \dots, x_n) = F(r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Řešení: Jedná se o derivaci složené funkce. Protože pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ je

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_k}{r},$$

platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{dF}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r} F'.$$

Pro druhou derivaci dostanu (počítám ji jako součin tří funkcí)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(x_k \frac{1}{r} F' \right) = \frac{F'}{r} - \frac{x_k^2}{r^3} F' + \frac{x_k^2}{r^2} F''.$$

Tedy hledaný Laplaceův operátor je

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n \left(\frac{F'}{r} - \frac{x_k^2}{r^3} F' + \frac{x_k^2}{r^2} F'' \right) = \frac{nF'}{r} - \frac{r^2}{r^3} F' + \frac{r^2}{r^2} F'' = F'' + \frac{n-1}{r} F'.$$

8

Výraz

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

přetřansformujte pro funkci $F(u, v) = f(x, y)$, kde

$$u = y, \quad v = \frac{y}{x}.$$

Řešení: Musíme najít druhé parciální derivace složené funkce. Podle věty o derivování složených funkcí platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial v} \end{aligned}$$

Podobně zjistíme, že druhé derivace jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2y}{x^3} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) = \frac{2y}{x^3} \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial v} \right) = -\frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial F}{\partial v} \end{aligned}$$

Když tyto derivace dosadíme do dané rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned} x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= x \left(\frac{2y}{x^3} \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right) + y \left(-\frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial F}{\partial v} \right) = \\ &= \frac{y}{x^2} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \end{aligned}$$

Ze vztahů $u = y$ a $v = \frac{y}{x}$ plyne $x = \frac{u}{v}$ a $y = u$. Jestliže dosadíme dostaneme výsledek

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{v^2}{u} \frac{\partial F}{\partial v} - v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}.$$

podle věty z počátku tohoto oddílu by se rovnala $\frac{\partial f}{\partial t}(u, t) = \partial_1 f(u, t)$. Pro lepší ozřejmení výpočtu ho uvedeme ještě jednou s jiným značením. Pišme $g(x, y) = f(f(x, y)^{f(y, x)}, f(y, x)^{f(x, y)})$ a počítejme

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(f(x, y)^{f(y, x)}, f(y, x)^{f(x, y)}) \cdot f(x, y)^{f(y, x)} \right. \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u}(y, x) \log f(x, y) + \frac{f(y, x)}{f(x, y)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, y) \right) + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial u}(f(x, y)^{f(y, x)}, f(y, x)^{f(x, y)}) \cdot \\ &\quad \left. f(y, x)^{f(x, y)} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x, y) \log f(y, x) + \frac{f(x, y)}{f(y, x)} \frac{\partial f}{\partial u}(y, x) \right) \right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(1, 1) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) \right)^2. \end{aligned}$$

■

§74. Další možností je tzv. **nepřímá aplikace**. Spočívá v tom, že známé hodnoty vyjádříme pomocí neznámých, a tyto neznámé pak vypočítáme jako řešení vzniklé rovnice případně soustavy rovnic.

a

P ř í k l a d Nechť $u = u(x, y)$ je funkce třídy C^1 na \mathbb{R}^2 splňující $u(x, x^2) = 1$ a $\frac{\partial u}{\partial x}(x, x^2) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Spočtěte $\frac{\partial u}{\partial y}(x, x^2)$.

Řešení. Opět si uvědomme, že $\frac{\partial u}{\partial x}(x, x^2)$ znamená parciální derivaci funkce u podle první proměnné v bodě (x, x^2) , tudíž uvedená rovnost znamená totéž, jako $\frac{\partial u}{\partial x}(a, a^2) = a$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Protože funkce $(x, y) \mapsto x$ i $(x, y) \mapsto x^2$ mají všude totální diferenciál, lze derivaci funkce $\varphi(x) = u(x, x^2)$ počítat podle výše uvedené věty, tedy $\varphi'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, x^2) \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial y}(x, x^2) \cdot 2x$. Zároveň však víme, že funkce φ je konstantně rovna jedné, a tedy $\varphi'(x) = 0$. Platí tedy $\frac{\partial u}{\partial x}(x, x^2) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, x^2) \cdot 2x = 0$. Po dosazení za $\frac{\partial u}{\partial x}(x, x^2)$ dostáváme $\frac{\partial u}{\partial y}(x, x^2) = -1/2$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Protože však u je třídy C^1 , je $\frac{\partial u}{\partial y}$ spojitá, a tedy i $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = -1/2$. ■

P ř í k l a d Nechť funkce f má totální diferenciál v bodě $(1, 0)$, funkce g je definována předpisem $g(u, v) = f(e^u \cos v, e^u \sin v)$ a $\frac{\partial g}{\partial u}(0, 0) = 7$, $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = -1$. Spočtěte parciální derivace funkce f v bodě $(1, 0)$.

Řešení. Podle věty z počátku oddílu (aplikované pro bod $a = (0, 0)$ a zobrazení $\varphi(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v)$) platí $\frac{\partial g}{\partial u}(0, 0) = (\partial_1 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot e^u \cos v + \partial_2 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot e^u \sin v)_{u=v=0}$ a $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = (\partial_1 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot (-e^u \sin v) + \partial_2 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot e^u \cos v)_{u=v=0}$.