6. cvičení

kunck6am@natur.cuni.cz
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php

1

Poznámka 1. Funkce $f(x,y)=x$ a $f(x,y)=y$. Spojitost funkcí je pak zachována aritmetickými operacemi (krom dělení 0) i skládáním.

Úloha 2. Pečlivě zdůvodněte, že následující funkce jsou spojité (na svém D_f):

1. $\sin \dfrac{xy}{x^2-y^3}$

   Řešení: Funkce $f(x,y)=x$ a $f(x,y)=y$ jsou spojité (vizte poznámku). Jejich součiny jsou taky spojité, tedy máme spojitost xy, x^2 a y^3. Rozdíl a podíl spojitých funkcí (pakliže nedělíme 0) je také spojitý, máme tedy spojitost funkce $\frac{xy}{x^2-y^3}$ na množině $[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2\neq y^3$. Funkce $f(z)=\sin z$ je také spojitá a tedy složení funkcí $\sin\frac{xy}{x^2-y^3}$ je také spojité na $[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2\neq y^3$.

2. $\arctan\,(x^2+y^2)$

   Řešení: Podobně.

3. $\ln(e^{|x^2-y^2|}+1)$

   Řešení: Podobně.

4. $(x+y)^{xy}$

   Řešení: Přepíšeme jako $e^{xy\ln(x+y)}$. Definičním oborem pak je $[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x+y>0$. Pak už postupujeme analogicky.

Úloha 3. Nechť $f(x)=x^2$. Najděte vzory množin:

1. $\{4\}$

   Řešení: Z grafu: $\{-2,2\}$

2. $(0,9)$

   Řešení: $(-3,0)\cup(0,3)$

3. $[0,9)$

   Řešení: $(-3,3)$

4. $[1,9]$

   Řešení: $[-3,3]$

5. $(-2,\infty)$

   Řešení: $\mathbb{R}$

6. $\{-4\}$

   Řešení: $\emptyset$

Úloha 4. Nechť $f(x) = \sin x$. Najděte vzory množin:

1. $\{1\}$

   Řešení: $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

2. $(-1, 1)$

   Řešení: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

3. $[0, 1)$

   Řešení: Let $A := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $B := \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. The resution is $A \cup B$.

4. $(-2, -1]$

   Řešení: $\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

5. $(-\infty, -3]$

   Řešení: $\emptyset$

Poznámka 5. Nechť $(X, \rho$ a (Y, σ) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$ je spojité zobrazení. Pak pro otevřenou množinu G v (Y, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (X, ρ) a pro uzavřenou množinu F v (Y, σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (X, ρ).

Úloha 6. Určete, zda jsou následující množiny otevřené nebo uzavřené a pečlivě zdůvodněte:

1. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^3 \leq 2\}$

   Řešení: Definujme funkci $f(x, y) = x^2 - y^3$. Funkce je spojitá (násobení a rozdíl spojitých). Dále uvažujme interval $(-\infty, 3)$, který je otevřený. Množinan pak je rovna $f^{-1}((-\infty, 3))$, tedy vzoru otevřeného intervalu při spojitém zobrazení. Tedy je otevřená.

2. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \arctan\,(x^2 + y^2) > 5\}$

   Řešení: $f(x, y) = \arctan\,(x^2 + y^2)$, interval $I = (5, \infty)$ je otevřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je otevřená.

3. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : -3 < e^{|x^2-y^2|} < 2\}$

   Řešení: $f(x, y) = e^{|x^2-y^2|}$, interval $I = (-3, 2)$ je otevřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je otevřená.

4. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3, x + y \leq 5\}$

   Řešení: $f(x, y) = x + y$, interval $I = (-\infty, 5]$ je uzavřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je uzavřená.

Dále $g(x,y)=x$, interval $J=[0,1]$ je uzavřená množina. Tedy $g^{-1}(J)$ je uzavřená.

Dále $h(x,y)=y$, interval $K=[-3,3]$ je uzavřená množina. Tedy $h^{-1}(K)$ je uzavřená.

Dohromady: průnik 3 uzavřených je uzavřená.

Úloha 7. Určete, zda jsou následující množiny omezené:

1. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<3\}$

   Řešení: Ano, přímo z definice se vejde do koule $B(0,\sqrt{3})$.

2. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y}<10\}$

   Řešení: Ne. Uvažujme např. množinu: $y=1$ a $x>1$.

3. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2+2y^2\le 1\}$

   Řešení: Ano, neb $x^2+y^2\le x^2+2y^2\le 1$.

4. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : \sin(xy)\le 1\}$

   Řešení: Ne, nerovnost je splněna pro celou rovinu.

5. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^6+y^6<2\}$

   Řešení: Ano, platí $|x|<2$ a $|y|<2$, což je čtverec, který je jistě omezená množina.

6. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{xy}{x^2+y^2}<\dfrac{1}{2}\}$

   Řešení: Ne. Máme $2xy<x^2+y^2$ tedy $0<x^2-2xy+y^2$, což je $0<(x-y)^2$. Tedy nerovnici splňuje celá rovina krom počátku, což není omezená množina.

2

Definice 8. Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $M\subset X$ je v prostoru (X,ρ) *hustá*, jestliže $\overline{M}=X$, a *řídká*, jestliže $X\setminus\overline{M}$ je hustá.

Úloha 9. Určte, zda jsou následující množiny husté/řídké (příp. ani jedno). Určete jejich mohutnost:

1. $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ hustá spočetná
2. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ hustá nespočetná
3. $\mathbb{N}$ v $\mathbb{R}$ řídká spočetná
4. $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{R}$ řídká spočetná

Úloha 10. Určte, zda jsou následující množiny husté/řídké (příp. ani jedno):

1. $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}^2$ řídká
2. polynomy v $(C[a,b], \rho_{\text{sup}})$ husté (Bolzano–Weierstrassova věta)
3. diferencovatelné funkce v $(C[a,b], \rho_{\text{sup}})$ husté, jelikož obsahují polynomy
4. jednoduché funkce v $(C[a,b], \rho_{\text{int}})$ husté - víme z Míry a integrálu

Úloha 11. Jak vypadají husté podmnožiny diskrétního merického prostoru?

Řešení: Pouze celý prostor. (Vycházíme z toho, že všechny konvergentní posloupnosti jsou od jistého členu konstantní.)

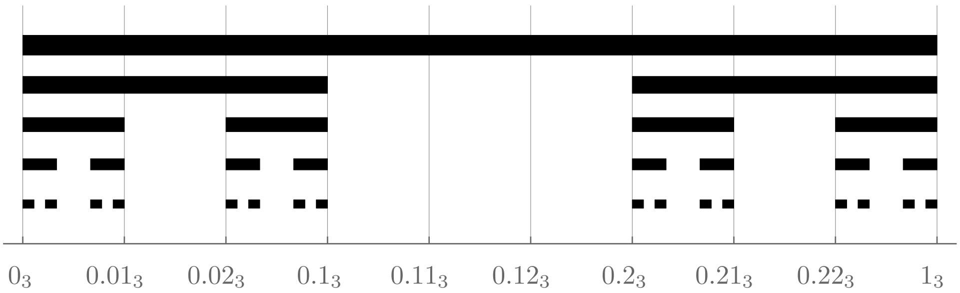
Úloha 12. Ukažte, že Cantorovo diskontinuum je uzavřená, nespočetná a řídká množina.

`https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorovo_diskontinuum`

Řešení: `http://msekce.karlin.mff.cuni.cz/~slavik/ma6/huste-a-ridke-mnoziny.pdf`

Z předchozí věty ihned plyne, že sjednocení konečného počtu řídkých množin je řídká množina. Spočetné sjednocení řídkých množin však již nemusí být řídká množina. Na druhou stranu ovšem platí, že úplný metrický prostor nemůže být spočetným sjednocením řídkých množin – jde o tzv. Baireovu větu, jedno z důležitých tvrzení moderní matematické analýzy (viz např. I. Netuka: *Základy moderní analýzy*, Matfyzpress, 2014, sekce 3.10 a 3.20).

Příklad 1.8. Pěkným netriviálním příkladem řídké množiny na reálné ose je tzv. Cantorovo diskontinuum. Začneme tím, že položíme $C_0 = [0, 1]$. Další krok je induktivní: Máme-li množinu C_{n-1}, pak C_n vznikne odebráním otevřených prostředních třetin intervalů nacházejících se v C_{n-1}. Postupně tedy konstruujeme nekonečnou posloupnost množin $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, atd., viz obr. 1. Cantorovo diskontinuum pak sestává z bodů intervalu $[0, 1]$, které nejsou odebrány v žádném kroku tohoto procesu, tj. jde o množinu $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.



Obrázek 1: Množiny C_0 až C_4 (shora dolů) z definice Cantorova diskontinua. Čísla udávající hranice intervalů jsou zapsána v trojkové soustavě.

Můžeme ji popsat ještě jiným ekvivalentním způsobem: C obsahuje právě všechna reálná čísla z $[0, 1]$, která lze v trojkové soustavě zapsat bez použití jedničky. Skutečně, C_1 vzniká z C_0 tak, že vynecháváme všechna čísla, která mají v trojkové soustavě na prvním místě za desetinnou čárkou jedničku. (Číslo $\frac{1}{3}$ má sice v trojkové soustavě zápis 0,1, ale také $0{,}0\overline{2}$, tj. lze je vyjádřit bez použití jedničky). Podobně C_2 vzniká z C_1 odebráním všech čísel, která mají jedničku na druhém místě za desetinnou čárkou, atd.

Všimneme si některých vlastností množiny C:

- C je uzavřená, neboť je průnikem uzavřených množin.
- C je nespočetná: Libovolné číslo z intervalu $[0, 1)$ můžeme zapsat ve dvojkové soustavě, následně všechny jedničky nahradit dvojkami a výsledek interpretovat jako trojkový zápis čísla z C. Tento proces odpovídá prostému zobrazení nespočetné množiny $[0, 1)$ do C, která je tedy rovněž nespočetná.
- C je řídká: Podle třetí části věty 1.5 stačí ukázat, že $[0, 1] \setminus C$ je hustá v $[0, 1]$. To je pravda, neboť libovolně blízko k libovolnému číslu z $[0, 1]$ existuje číslo, které nelze v trojkové soustavě zapsat bez použití jedničky (stačí vzít dané číslo a dostatečně daleko za desetinnou čárkou změnit všechny cifry na jedničky).
- C má nulovou Lebesgueovu míru. Míra intervalů, které postupně odstraňujeme z $[0, 1]$, je totiž

$$1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Vidíme, že Cantorovo diskontinuum je z pohledu teorie množin velkou množinou, avšak z pohledu metrických prostorů i teorie míry jde o množinu malou.

Podobným způsobem jako Cantorovo diskontinuum na přímce vznikají i další zajímavé objekty, jako je např. Sierpińského koberec v rovině (obr. 2) a Mengerova houba v prostoru (obr. 3). Opět jde o uzavřené nespočetné řídké množiny nulové míry, navíc to jsou jednoduché populární příklady fraktálů.

Úloha 13. 1. Najděte posloupnost uzavřených množin $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$, že $\bigcup_n F_n$ je otevřená množina.

Řešení: Řešení: Např. $F_n = [-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$, jejich sjednocení je $(-1, 1)$.

2. Najděte posloupnost otevřených množin $G_1 \supset G_2 \supset \cdots$, že $\bigcap_n G_n$ je uzavřená množina.

Řešení: Např. $G_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, jejich průnik je $\{0\}$.

Poznámka 14. Uvažujme množinu všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ Pak definujeme metriku

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 15. Uvažujte prostor l^∞ a jeho podmnožinu M posloupností takových, že mají pouze konečně mnoho nenulových členů. Najděte cauchyovskou posloupnost v M takovou, že nekonverguje v M. Tedy ukažte, že M není úplný.

Řešení: Uvažujme pro pevné n posloupnost x_j^n:

$$x_j^n = \begin{cases} \frac{1}{j}, & j \leq n, \\ 0, & j > n. \end{cases}$$

Pak (posloupnost posloupností) x^n konverguje k posloupnosti $x_j = \frac{1}{j}$, která ale neleží v M. M tedy není úplný.

Poznámka 16. V prostoru $C([0, 1])$ uvažujeme supremovou metriku

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Úloha 17. Ukažte, že posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n$ konverguje k funkci $f(x) = 1$ v prostoru $C([0, 1], \rho_{\text{int}})$, ale ne v $C([0, 1], \rho_{\text{sup}})$.

Řešení: V integrační metrice máme:

$$\int_0^1 1 - x^{\frac{1}{n}} \, \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{\frac{1}{n} + 1},$$

což konverguje k 0.

V supremové metrice ale máme

$$\max_{0 \leq x \leq 1} 1 - x^{\frac{1}{n}} = 1.$$

3

Definice 18. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ v metrickém prostoru (X, ρ) je *cauchyovská*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n, m \geq n_0 \, : \, \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Definice 19. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost prvků z X je konvergentní.

Definice 20. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků v X lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Úloha 21. Ujasněte si, jak přesně se liší definice uzavřenosti, úplnosti a kompaktnosti.

Úloha 22. Ukažte, že diskrétní metrický prostor je kompaktní, právě když X má konečně mnoho prvků.

Řešení: Posloupnost v diskrétním metrickém prostoru je konvergentní právě tehdy, když je od jistého n_0 konstantní.

Aby tedy bylo možné z každé posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost, nesmí být v této posloupnosti nekonečně různých prvků.

Úloha 23. Nechť $f : X \to Y$ je spojitá funkce a $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v X. Je pravda, že pak $f(x_n)$ je cauchyovská v Y?

Návod: Pokud se Vám špatně představuje cauchyovská posloupnost, přemýšlejte o konvergentní posloupnosti v $\mathbb{R}$.

Řešení: Nepravda. Protipříklad: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_n = \frac{1}{n}$. Pak $\frac{1}{n}$ je cauchyovská, ale $f(x_n) = n$ nikoli.

Úloha 24. Nechť x_n je cauchyovská posloupnost, nechť dále $x_{n_k} \to x$ je její konvergentní podposloupnost. Ukažte, že také x_n koverguje k x.

Řešení: Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože x_n je cauchyovská, tak existuje n_1: $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ pro všechna $m, n > n_1$.

Dále, protože x_{n_k} je konvergentní podposloupnost, tak existuje n_2: Dále, protože x_{n_k} je konvergentní podposloupnost, tak existuje n_2: $\rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$ pro všechna $k > n_2$.

Zvolme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro $n > n_0$ máme

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Tedy $x_n \to x$.

Úloha 25. Je každá cauchyovská posloupnost x_n omezená? Dokažte, nebo najděte protipříklad.

Návod: jak to bylo v $\mathbb{R}^1$?

Řešení: Ano.

Zvolme $\varepsilon = 1$. Protože x_n je cauchyovská, existuje n_0: $\rho(x_m, x_n) < 1$ pro všechna $m, n > n_0$.

Položme $A = \max_{i,j=1,2,\dots n_0}\{\rho(x_i, x_j)\}$ a $B = \max\{A, 1\}$.

Pak $\rho(x_m, x_n) < B$ pro $m, n \geq 1$. Tedy posloupnost $\{x_n\}$ je omezená.

Úloha 26. Je každá omezená posloupnost cauchyovská? Dokažte, nebo najděte protipříklad.

Řešení: Nikoli, uvažujme $(-1)^n$ v $\mathbb{R}$.