6. cvičení

kunck6am@natur.cuni.cz
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php`

1

Poznámka 1. Funkce $f(x,y) = x$ a $f(x,y) = y$. Spojitost funkcí je pak zachována aritmetickými operacemi (krom dělení 0) i skládáním.

Úloha 2. Pečlivě zdůvodněte, že následující funkce jsou spojité (na svém D_f):

1. $\sin \dfrac{xy}{x^2 - y^3}$
2. $\arctan\,(x^2 + y^2)$
3. $\ln(e^{|x^2-y^2|} + 1)$
4. $(x+y)^{xy}$

Úloha 3. Nechť $f(x) = x^2$. Najděte vzory množin:

1. $\{4\}$
2. $(0, 9)$
3. $[0, 9)$
4. $[1, 9]$
5. $(-2, \infty)$
6. $\{-4\}$

Úloha 4. Nechť $f(x) = \sin x$. Najděte vzory množin:

1. $\{1\}$
2. $(-1, 1)$
3. $[0, 1)$
4. $(-2, -1]$
5. $(-\infty, -3]$

Poznámka 5. Nechť $(X, \rho$ a (Y, σ) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$ je spojité zobrazení. Pak pro otevřenou množinu G v (Y, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (X, ρ) a pro uzavřenou množinu F v (Y, σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (X, ρ).

Úloha 6. Určete, zda jsou následující množiny otevřené nebo uzavřené a pečlivě zdůvodněte:

1. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^3 \le 2\}$
2. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \arctan\,(x^2 + y^2) > 5\}$
3. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : -3 < e^{|x^2-y^2|} < 2\}$
4. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, -3 \le y \le 3, x + y \le 5\}$

Úloha 7. Určete, zda jsou následující množiny omezené:

1. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3\}$
2. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} < 10\}$
3. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \le 1\}$

4. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \sin(xy) \leq 1\}$
5. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^6 + y^6 < 2\}$
6. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{xy}{x^2+y^2} < \dfrac{1}{2}\}$

2

Definice 8. Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je v prostoru (X,ρ) *hustá*, jestliže $\overline{M} = X$, a *řídká*, jestliže $X \setminus \overline{M}$ je hustá.

Úloha 9. Určte, zda jsou následující množiny husté/řídké (příp. ani jedno). Určete jejich mohutnost:

1. $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{N}$ v $\mathbb{R}$
4. $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{R}$

Úloha 10. Určte, zda jsou následující množiny husté/řídké (příp. ani jedno):

1. $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}^2$
2. polynomy v $(C[a,b], \rho_{\text{sup}})$
3. diferencovatelné funkce v $(C[a,b], \rho_{\text{sup}})$
4. jednoduché funkce v $(C[a,b], \rho_{\text{int}})$

Úloha 11. Jak vypadají husté podmnožiny diskrétního merického prostoru?

Úloha 12. Ukažte, že Cantorovo diskontinuum je uzavřená, nespočetná a řídká množina.
`https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorovo_diskontinuum`

Úloha 13.
1. Najděte posloupnost uzavřených množin $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$, že $\bigcup_n F_n$ je otevřená množina.
2. Najděte posloupnost otevřených množin $G_1 \supset G_2 \supset \cdots$, že $\bigcap_n G_n$ je uzavřená množina.

Poznámka 14. Uvažujme množinu všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ Pak definujeme metriku

$$\rho_\infty(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 15. Uvažujte prostor l^∞ a jeho podmnožinu M posloupností takových, že mají pouze konečně mnoho nenulových členů. Najděte cauchyovskou posloupnost v M takovou, že nekonverguje v M. Tedy ukažte, že M není úplný.

Poznámka 16. V prostoru $C([0,1])$ uvažujeme supremovou metriku

$$\rho_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Úloha 17. Ukažte, že posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n$ konverguje k funkci $f(x) = 1$ v prostoru $C([0,1], \rho_{\text{int}})$, ale ne v $C([0,1], \rho_{\text{sup}})$.

3

Definice 18. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ v metrickém prostoru (X, ρ) je *cauchyovská*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, m \geq n_0\ :\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Definice 19. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost prvků z X je konvergentní.

Definice 20. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků v X lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Úloha 21. Ujasněte si, jak přesně se liší definice uzavřenosti, úplnosti a kompaktnosti.

Úloha 22. Ukažte, že diskrétní metrický prostor je kompaktní, právě když X má konečně mnoho prvků.

Úloha 23. Nechť $f : X \to Y$ je spojitá funkce a $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v X. Je pravda, že pak $f(x_n)$ je cauchyovská v Y?

Návod: Pokud se Vám špatně představuje cauchyovská posloupnost, přemýšlejte o konvergentní posloupnosti v $\mathbb{R}$.

Úloha 24. Nechť x_n je cauchyovská posloupnost, nechť dále $x_{n_k} \to x$ je její konvergentní podposloupnost. Ukažte, že také x_n koverguje k x.

Úloha 25. Je každá cauchyovská posloupnost x_n omezená? Dokažte, nebo najděte protipříklad.

Návod: jak to bylo v $\mathbb{R}^1$?

Úloha 26. Je každá omezená posloupnost cauchyovská? Dokažte, nebo najděte protipříklad.