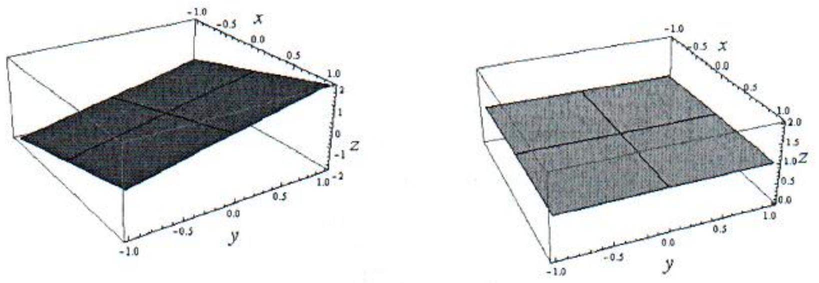
Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je

$D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y) = x + y$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné y (vpravo).Grafem funkce $f(x, y)$ je nakloněná rovina, grafem její parciální derivace podle proměnné y je rovina ve výšce 1 rovnoběžná s rovinou (xy).

1a

2. $f(x, y) = 35x - 4y^2 + 3x2y$

Řešení

Definiční obor této funkce je $D_f = \mathbb{R}^2$.

Postupujeme zde jako v předchozím příkladu. Využijeme vztah pro derivaci funkce jedné proměnné, a to $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Dostáváme:

$f'_x(x, y) = 35 + 3 \cdot 2y = 35 + 6y$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je

$D_{f'_x} = \mathbb{R}^2$

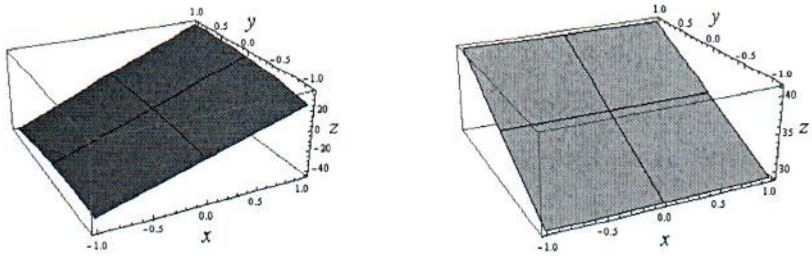
U parciální derivace funkce f podle podle proměnné y postupujeme jako u derivace funkce f podle proměnné x s tím rozdílem, že proměnná x je pro nás konstanta a derivujeme podle proměnné y.

$f'_y(x, y) = -8y + 2 \cdot 3x = 6x - 8y$

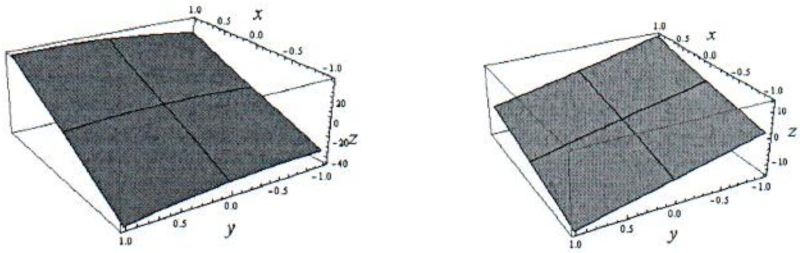
Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je

$D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$

1a



Obrázek 3: Graf funkce $f(x,y) = 35x - 4y^2 + 3x2y$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné x (vpravo). Funkce f je vzhledem k proměnné y lineární, tj. pro pevnou hodnotu y je grafem funkce přímka. Na obrázku je černou linkou znázorněn graf funkce f pro hodnotu $y = 0$. Parciální derivace funkce f podle proměnné x pak pro pevnou hodnotu proměnné y představuje funkci konstantní, jejím grafem je přímka rovnoběžná s rovinou (xy). To lze pozorovat na obrázku vpravo, kde je černou linkou znázorněn graf parciální derivace funkce f podle proměnné x pro pevně zvolené $y = 0$.



Obrázek 4: Graf funkce $f(x,y) = 35x - 4y^2 + 3x2y$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné y (vpravo). Pro pevně zvolené $x = 0$ je grafem funkce f parabola znázorněná modrou křivkou. Grafem parciální derivace funkce f podle proměnné x je pro stejnou hodnotu proměnné x, tj. $x = 0$, přímka.

3. $f(x,y) = \ln(x)\cos y$

   Řešení

   Definiční obor této funkce je $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

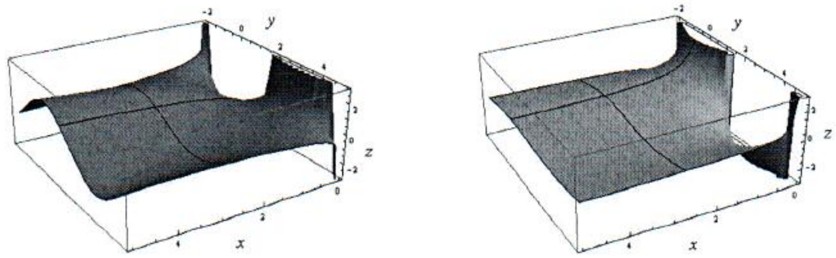
   Při výpočtu parciální derivace funkce f podle proměnné x postupujeme tak, že $\cos y$ budeme brát jako konstantu. Funkci $\ln(x)$ budeme derivovat podle vztahu pro derivaci funkce jedné proměnné, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, tudíž:

   $f'_x(x,y) = \frac{1}{x}\cos y$

   Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je

$D_{f'_x} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$

Definiční obory parciálních derivací musí být podmnožinou definičního oboru zadané funkce. Proto zde není definičním oborem $D_{f'_x} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, ale $D_{f'_x} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.



Obrázek 5: Graf funkce $f(x, y) = \ln(x) \cos y$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné x (vpravo). Na obrázku je černou linkou znázorněn graf funkce f pro hodnotu $y = 0$ a modrou linkou graf funkce f pro hodnotu $x = e$. Parciální derivace funkce f podle proměnné x v grafu funkce $f(x, y)$ při pevném y představuje funkci $\frac{1}{x}$ (černá linka), která vznikla derivací funkce $\ln(x)$.

Nyní postupujeme opačně než v předchozí situaci, budeme derivovat funkci f podle proměnné y. Funkce $\ln(x)$ pro nás bude vystupovat jako konstanta a derivujeme funkci $\cos y$ podle vztahu $(\cos y)' = -\sin y$. A dostaneme:

$f'_y(x, y) = \ln(x)(-\sin y) = -\ln(x) \sin y$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je

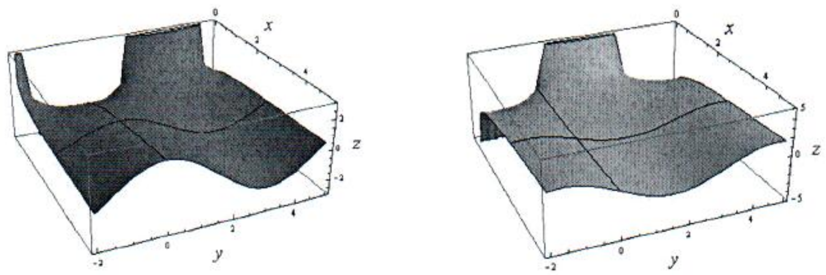
$D_{f'_y} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$

(15) 4. $f(x, y) = \frac{\sin y^2}{x}$

Řešení

Definiční obor této funkce je $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

Tuto funkci si nejdříve rozložíme na součin dvou základních elementárních funkcí podle jednotlivých proměnných. U parciální derivace funkce f podle proměnné x si nebudeme všímat funkce $\sin(y^2)$ a budeme se zabývat pouze



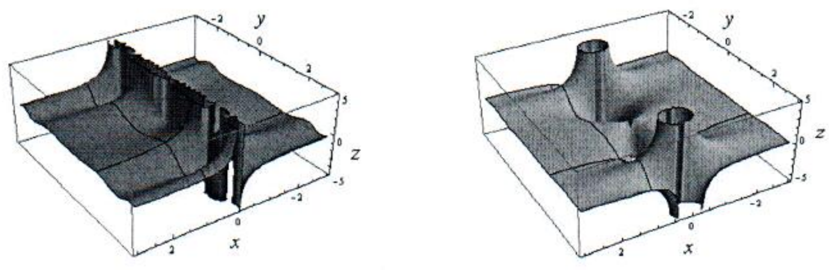
Obrázek 6: Graf funkce $f(x,y) = \ln(x)\cos y$ (vlevo) a její parciální derivace funkce f podle proměnné y (vpravo). Parciální derivace funkce f podle proměnné y v grafu funkce $f(x,y)$ při pevném $x = e$ představuje funkci $-\sin y$ (modrá linka), která vznikla derivací funkce $\cos x$.

funkcí $\frac{1}{x}$. Využijeme vztah pro derivace funkce jedné proměnné $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, stačí si představit, že $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Pak snadno získáme:

$f'_x(x,y) = \sin y^2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{\sin y^2}{x^2}$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je $D_{f'_x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

16



Obrázek 7: Graf funkce $f(x,y) = \frac{\sin y^2}{x}$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné x (vpravo). Černá linka představuje graf funkce pro pevně zvolené $y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,tj. graf funkce $\frac{1}{x}$ v případě funkce f a graf funkce $-\frac{1}{x^2}$ v případě f'_x. Modrá linka zase graf funkce f a f'_x pevně zvolenou hodnotu $x = 1$.

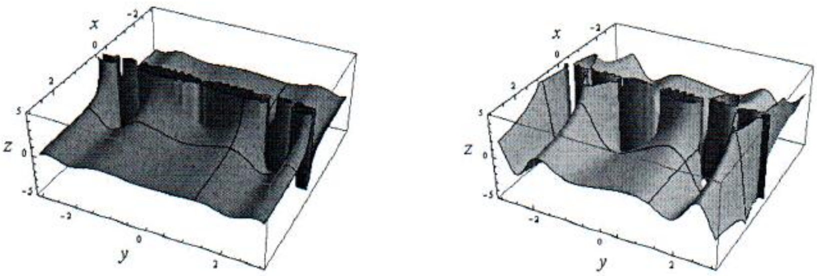
V případě derivování funkce f podle proměnné y budeme muset počítat derivaci složené funkce $\sin y^2$ a to tak, že použijeme vztah $(g(h(y)))' = g'(h(y)) \cdot h'(y)$, kde g pro nás představuje funkce $\sin y$ a derivujeme podle vzorce $(\sin y)' = \cos y$ a funkci h čili y^2 derivujeme podle $(y^n)' = n \cdot y^{n-1}$, s tím, že $\frac{1}{x}$ bereme jako konstantu a nevšímáme si jí. Pak:

$f'_y(x,y) = \frac{1}{x}\cos(y^2)2y = \frac{2y\cos y^2}{x}$

(15)

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je

$D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.



Obrázek 8: Graf funkce $f(x,y) = \frac{\sin y^2}{x}$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné y (vpravo). Černá linka představuje graf funkce f a f'_y pro pevně zvolenou hodnotu proměnné $y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Modrá linka představuje graf funkce pro pevně zvolené $x = 1$, tj. graf funkce $\sin y^2$ v případě f a graf funkce $2y\cos y^2$ v případě f'_y.

5. $f(x,y) = \frac{y\cos^2 x}{\sqrt{x^2+9y}}$

Řešení

Definiční obor této funkce je $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y > 0\}$.

U obou parciálních derivací funkce f budeme muset využít vztah pro výpočet derivace podílu funkcí a to: $\left(\frac{h(x,y)}{g(x,y)}\right)'_x = \frac{h'_x(x,y)\cdot g(x,y) - h(x,y)\cdot g'_x(x,y)}{(g(x,y))^2}$.

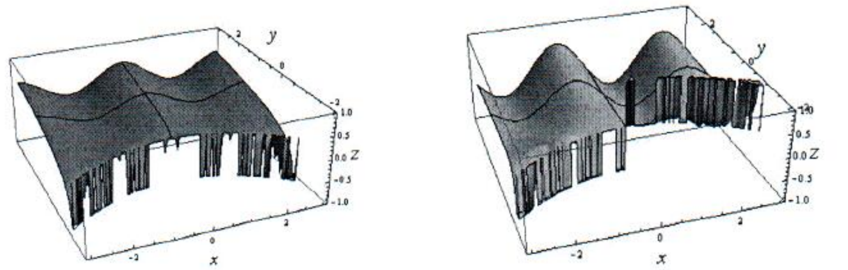
Při výpočtu parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle proměnné x, budeme muset použít vztah $(g\,(h(x)))' = g'\,(h(x)) \cdot h'(x)$, který využijeme k derivaci funkce $\cos^2 x$. Funkce g je pro nás mocnina, její derivací dostaneme $2\cos x$ a funkce h představuje funkci $\cos x$, kterou derivujeme podle $(\cos x)' = -\sin x$. Ještě musíme spočítat druhou složenou funkci a to $\sqrt{x^2+9y}$. Tuto funkci si představíme jako: $(x^2+9y)^{\frac{1}{2}}$ a poté už jí derivujeme podle známého vzorce. Nyní už můžeme dosazovat do vzorce pro derivaci podílu funkcí.

$$f'_x(x,y) = \frac{\left[y 2\cos x(-\sin x)\cdot 1\sqrt{x^2+9y}\right] - y\cos^2 x \frac{1}{2\sqrt{x^2+9y}}2x}{x^2+9y} =$$

$$= \frac{-y\cos x\left(2\sin x\sqrt{x^2+9y} + x\cos x\frac{1}{\sqrt{x^2+9y}}\right)}{x^2+9y} =$$

$$= \frac{-y\cos x\left(\frac{2\sin x(x^2+9y)+x\cos x}{\sqrt{x^2+9y}}\right)}{x^2+9y} = \frac{-y\cos x\left[2\sin x(x^2+9y)+x\cos x\right]}{\sqrt{(x^2+9y)^3}}$$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je $D_{f'_x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y > 0\}$.



Obrázek 9: Graf funkce $f(x,y) = \frac{y\cos^2 x}{\sqrt{x^2+9y}}$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné x (vpravo). Na těchto grafech je patrné omezení definičním oborem $D_{f'_x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y > 0\}$, jehož hranicí je parabola. Černá linka představuje graf funkce pro pevně zvolené $y = 1$ a modrá linka pevně zvolené $x = 0$.

Dále derivujeme funkci f podle proměnné y, postup výpočtu je zde stejný, jako v předchozím případě, ale funkce $\cos^2 x$ si nevšímáme, proto se nám situace ulehčí.

$$f'_y(x,y) = \frac{\cos^2 x\sqrt{x^2+9y} - y\cos^2 x\frac{1}{2\sqrt{x^2+9y}}9}{x^2+9y} = \frac{\cos^2 x\left(\sqrt{x^2+9y} - \frac{9}{2}y\frac{1}{\sqrt{x^2+9y}}\right)}{x^2+9y} =$$

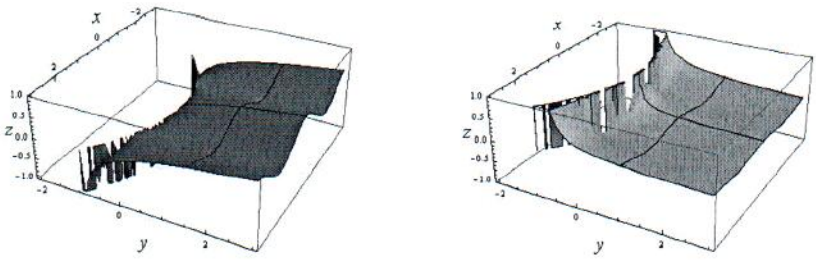
$$= \frac{\cos^2 x\left(\frac{x^2+9y-\frac{9}{2}y}{\sqrt{x^2+9y}}\right)}{x^2+9y} = \frac{\cos^2 x(x^2+\frac{9}{2}y)}{\sqrt{(x^2+9y)^3}}$$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je $D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y > 0\}$.

1c

6. $f(x,y) = xy\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$

Řešení



Obrázek 10: Graf funkce $f(x, y) = \frac{y \cos^2 x}{\sqrt{x^2+9y}}$ a její parciální derivace podle proměnné y.

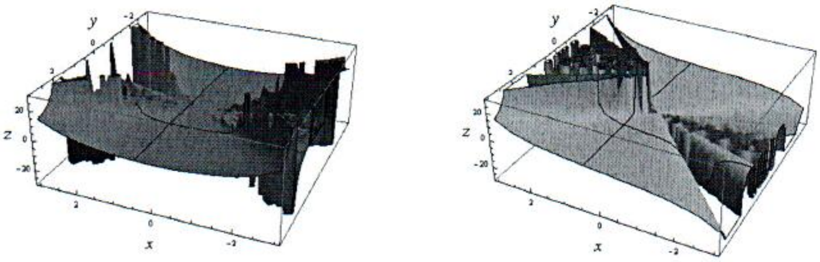
Definiční obor této funkce je $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Nejprve budeme derivovat funkci podle proměnné x. Využijeme vzorec pro součin $(h(x) \cdot g(x))' = h'(x) \cdot g(x) + h(x) \cdot g'(x)$. Kde $h(x)$ pro nás bude xy a $g(x)$ pak $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$. Dále vidíme, že $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$ budeme muset derivovat jako složenou funkci, kde využijeme vztah: $(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$. Vzorec pro výpočet derivace $\operatorname{tg} x$ je $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$f'_x(x, y) = y \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right) + xy \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)} \frac{1}{y} = y \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je $D_{f'_x} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

1e



Obrázek 11: Graf funkce $f(x, y) = xy \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$ a její parciální derivace podle proměnné x.

U derivace funkce podle proměnné y postupujeme jako u předchozí derivace, s tím rozdílem, že nyní x bude bráno jako konstanta.

Značíme-li v $\mathbb{R}^3$ proměnné x, y, z a je-li $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, můžeme příslušné parciální derivace zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial z}.$$

Poznámka 14.6. Podle definice je parciální derivace $\partial_i f(a)$ rovna

$$(16) \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \cdots, a_p) - f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \cdots, a_p)}{t};$$

v čitateli se mění pouze i-tá souřadnice, ostatní souřadnice jsou konstantní. Položíme-li tedy

$$(17) \qquad \varphi_i(t) := f(a_1, \cdots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \cdots, a_p),$$

je patrné, že

$$(18) \qquad \partial_i f(a) = \varphi_i'(a_i).$$

Parciální derivování podle i-té proměnné se tedy redukuje na „obyčejné" derivování podle této proměnné, při němž se ostatní proměnné chovají jako konstanty.

Čtenář snadno ověří, že pro *vektorové* funkce f, g platí rovnost

$$(19) \qquad \partial_i (f \pm g)(a) = \partial_i f(a) \pm \partial_i g(a),$$

má-li pravá strana smysl; pro *skalární* funkce je navíc

$$(20) \qquad \partial_i (fg)(a) = \partial_i f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot \partial_i g(a),$$

má-li pravá strana smysl, a

$$(21) \qquad \partial_i \Big(\frac{f}{g}\Big)(a) = \frac{\partial_i f(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot \partial_i g(a)}{g^2(a)},$$

má-li pravá strana smysl.

(1d)

Příklad 14.4⁰. 1. Definičním oborem funkce $f(x,y) := x^y$ $(= \exp(y \lg x))$ je otevřená polorovina $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$; v každém jejím bodě (x, y) je

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^y \lg x.$$

2. Vektorová funkce $f(x,y,z) := \big(e^{xyz},\ z\sin(x/y)\big)$ má ve svém definičním oboru $\{(x,y,z);\ y \neq 0\}$ (geometricky: $\mathbb{R}^3$ bez roviny xz) tyto parciální derivace:

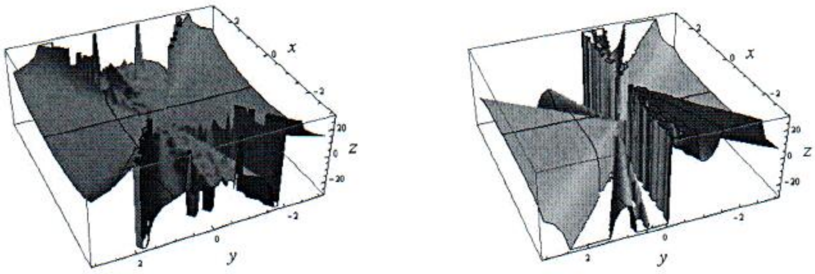
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \Big(yz\,e^{xyz},\ \frac{z}{y}\cos\frac{x}{y}\Big), \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \Big(xz\,e^{xyz},\ -\frac{xz}{y^2}\cos\frac{x}{y}\Big),$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \Big(xy\,e^{xyz},\ \sin\frac{x}{y}\Big).$$

$f'_y(x,y) = x\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{y}\right) + xy\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}(-1)\frac{x}{y^2} = x\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je

$D_{f'_y} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$



Obrázek 12: Graf funkce $f(x,y) = xy\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$ a její parciální derivace podle proměnné y.

1e

7. $f(x,y) = xe^{xy}$

Řešení

Definiční obor této funkce je $D_f = \mathbb{R}^2$.

Nejprve využijeme již známý vztah pro součin $(h(x)\cdot g(x))' = h'(x)\cdot g(x) + h(x)\cdot g'(x)$. Kde funkce $h(x)$ představuje funkci x a $g(x)$ funkci e^{xy}. Dále využijeme vztah $(e^x)' = e^x$. A poté ještě musíme zderivovat exponent, čili $(xy)'_x = y$.

$f'_x(x,y) = e^{xy} + xe^{xy}y = e^{xy} + xye^{xy}$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je

$D_{f'_x} = \mathbb{R}^2.$

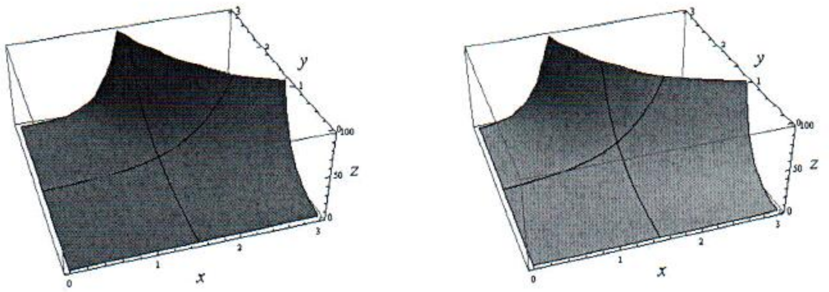
Zde nám ubude práce se součinem, protože x máme jako konstantu, proto využíváme pouze vztahu $(e^x)' = e^x$

$f'_y(x,y) = xe^{xy}x = x^2e^{xy}$

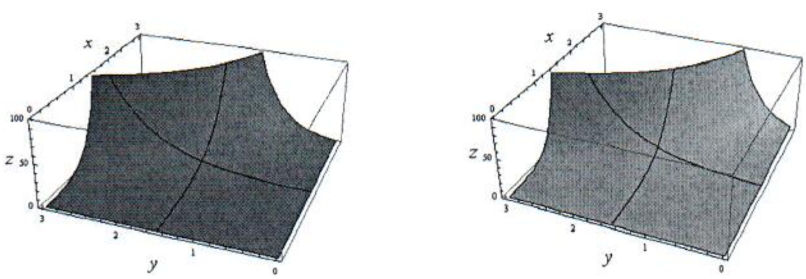
Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je

$D_{f'_y} = \mathbb{R}^2.$

1e



Obrázek 13: Graf funkce $f(x,y) = xe^{xy}$ a její parciální derivace podle proměnné x.



Obrázek 14: Graf funkce $f(x,y) = xe^{xy}$ a její parciální derivace podle proměnné y.

1f

8. $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$

Řešení

Definiční obor této funkce je $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq x, x > 0\} \cup$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x \geq y \geq x, x < 0\}$.

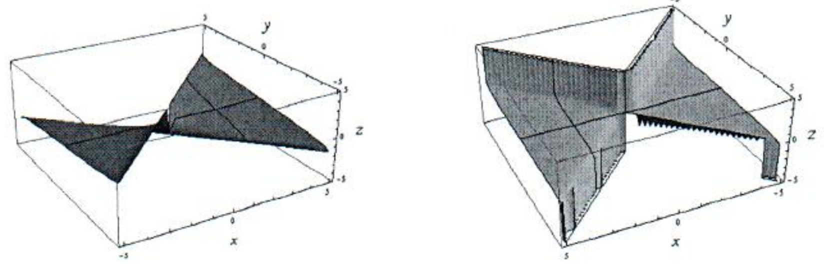
Zde máme opět složenou funkci, kterou budeme derivovat podle $(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$. Kde $g(x)$ bude reprezentováno funkcí $\arcsin x$ a funkce $\frac{y}{x}$ pro nás bude představovat $h(x)$. Pro derivaci $\arcsin x$ využijeme vztah $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Na závěr si ještě $\frac{y}{x}$ vyjádříme jako $y \cdot x^{-1}$, pak již lehce spočteme parciální derivaci funkce f podle proměnné x.

$f'_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} \cdot (-1) \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2}}} \cdot \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2}}}$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je

1f

$D_{f'_x} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{x^2} < 1, x \neq 0\right\}.$



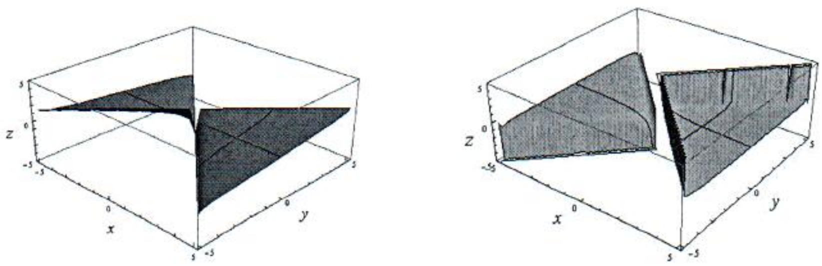
Obrázek 15: Graf funkce $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$ a její parciální derivace podle proměnné x.

Zde je postup pro derivace úplně stejný, pouze funkci $\frac{y}{x}$ derivujeme podle y.

$f'_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2}}}$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je

$D_{f'_y} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{x^2} < 1, x \neq 0\right\}.$



Obrázek 16: Graf funkce $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$ a její parciální derivace podle proměnné y.

1g

9. $f(x,y) = (x+y)^x$

Řešení

Definiční obor této funkce je $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$.

U paricální derivace funkce $f(x,y)$ podle proměnné x budeme využívat

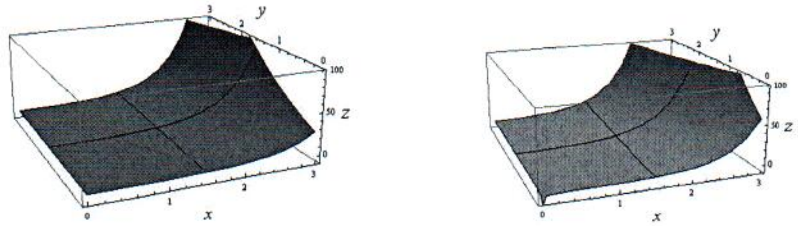
1g vzorec $\left(h(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\cdot\ln h(x)}\right)' = h(x)^{g(x)}\left(g'(x)\cdot\ln h(x) + g(x)\cdot\frac{h'(x)}{h(x)}\right)$.

Teď již zbývá jen dosadit.

$f'_x(x,y) = (x+y)^x\left[1\cdot\ln(x+y) + x\frac{1}{x+y}\right] = (x+y)^x\left[\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\right]$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je

$D_{f'_x} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y>0\}$.



Obrázek 17: Graf funkce $f(x,y) = (x+y)^x$ a její parciální derivace podle proměnné x.

Parciální derivaci funkce f podle proměnné y, derivujeme podle vzorce $(y^n)' = n\cdot y^{n-1}$, s tím, že pak ještě musíme zderivovat vnitřní funkci, v našem případě však derivace $(y)' = 1$.

$f'_y(x,y) = x\,(x+y)^{x-1}$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je

$D_{f'_y} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y>0\}$.

Poznámka 1.6 *Podobně postupujeme při výpočtu parciálních derivací funkce tří proměnných. Což si ukážeme na následujícím příkladu.*

10. $f(x,y,z) = x^2z + \ln(2y-xz)$

Řešení

Definiční obor této funkce je $D_f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2y-xz>0\}$.

(1h)

$$f'_x(x,y) = 3 \cdot \frac{1}{5\sqrt[5]{(xy^2)^4}} y^2 = \frac{3y^2}{5\sqrt[5]{(xy^2)^4}}$$

$$f'_y(x,y) = 3 \cdot \frac{1}{5\sqrt[5]{(xy^2)^4}} 2xy = \frac{6xy}{5\sqrt[5]{(xy^2)^4}}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 \geq 0\}$$

$$D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 > 0\}$$

12. $f(x,y) = y\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt[3]{xy}}$

Řešení

$$f'_x(x,y) = y\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1\cdot(xy)^{\frac{1}{3}} - x(\frac{1}{3}(xy)^{-\frac{2}{3}}y)}{(xy)^{\frac{2}{3}}} = \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{(xy)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(xy)(xy)^{-\frac{2}{3}}}{(xy)^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{(xy)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(xy)^{\frac{1}{3}}}{(xy)^{\frac{2}{3}}} = \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{2}{3}(xy)^{\frac{1}{3}}}{(xy)^{\frac{2}{3}}} = \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{xy}}$$

$$f'_y(x,y) = \sqrt{x} + x(-\tfrac{1}{3})(xy)^{-\frac{4}{3}}x = \sqrt{x} - \tfrac{1}{3}x^2y^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{4}{3}} = \sqrt{x} - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{y^4}}$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, xy > 0\}$$

13. $f(x,y) = \frac{y+x}{y-x}$

Řešení

$$f'_x(x,y) = \frac{(y-x)-(y+x)(-1)}{(y-x)^2} = \frac{y-x+y+x}{(y-x)^2} = \frac{2y}{(y-x)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{(y-x)-(y+x)}{(y-x)^2} = \frac{y-x-y-x}{(y-x)^2} = -\frac{2x}{(y-x)^2}$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$

14. $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$

Řešení

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

1i

18. $f(x,y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$

Řešení

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right) \left[\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot 1}{(x-y)^2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right) \left[\frac{x-y-x-y}{(x-y)^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2y}{(x+y)\cdot(x-y)} = -\frac{y}{x^2-y^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right) \left[\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right) \left[\frac{x-y+x+y}{(x-y)^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(x+y)\cdot(x-y)} = \frac{x}{x^2-y^2}$$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x, y < x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x, y > x\}$

1j

19. $f(x,y) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$

Řešení

$$f'_x(x,y) = -\frac{1}{1+\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2+(x-y)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f'_y(x,y) = -\frac{1}{1+\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{x-y-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2} = -\frac{x-y+x+y}{(x+y)^2+(x-y)^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$

$D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$

20. $f(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{x-y}$

Řešení

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & -8 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 8 & -103 & -134 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & 54, \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{63} \end{pmatrix}.$$

Matice A má hodnost 5, a je tedy regulární. Proto platí $\det A \neq 0$.

2a

Příklad B2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech, kde $y^2 \neq x^2$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2y.$$

V bodech, kde $y^2 = x^2$, zkusme počítat parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ podle definice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{|(x+t)^2 - y^2|}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{|2xt + t^2|}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} |2x + t|. \end{aligned}$$

Poslední limita existuje, jen když $x = 0$, a je rovna nule. Vzhledem k symetrii funkce f ($f(x, y) = f(y, x)$) totéž platí pro $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 3 - 2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 2).$$

Příklad B3 : Položme

$$F(x, y) = 2x^4 y + x^3 + y^3 + xy - 1.$$

2b

Příklad D2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x,y]$, kde $xy \neq 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2-y} \cdot 2x + \operatorname{sgn}(xy) \cdot y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{x^2-y} + 7 + \operatorname{sgn}(xy) \cdot x.$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $xy = 0$. Z věty o aritmetice limit plyne, že funkce f má parciální derivaci podle x (resp. podle y) v bodě $[x,y]$ právě tehdy, když ji tam má funkce $g : [x,y] \to |xy|$ (je totiž $f - g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$). Počítejme derivace funkce g v bodech $[x,0]$, $x \in \mathbb{R}$, a $[0,y]$, $y \in \mathbb{R}$, podle definice:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x+t,0) - g(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x,t) - g(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|xt|}{t} = \lim_{t\to 0} |x| \operatorname{sgn} t.$$

Poslední limita existuje, právě když $x = 0$, a v tomto případě je nulová.

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0,y+t) - g(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,y) - g(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|ty|}{t} = \lim_{t\to 0} |y| \operatorname{sgn} t.$$

Poslední limita existuje, právě když $y = 0$, a v tomto případě je nulová.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,y];\ y \in \mathbb{R},\ y \neq 0\},$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,0];\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 1/e + 16 + (2/e + 2) \cdot (x-1) + (8 - 1/e) \cdot (y-2).$$

Příklad D3 : Položme

$$F(x,y) = \log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} \cdot \frac{1}{1+y^2} + x.$$

2c

Příklad A2 : Funkce f je definována na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \sin x + y \geq 0\}$. V bodech, kde $y + \sin x > 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}(y+\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}(y+\sin x)^{-\frac{1}{2}}.$$

nakreslete si Df

?

V bodech kde $y+\sin x = 0$ nemůže parciální derivace f podle y existovat. Parciální derivace podle x může existovat jen v bodech tvaru $[3\pi/2 + 2k\pi, 1]$, $k \in \mathbb{Z}$. Zkusme počítat podle definice

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(3\pi/2 + 2k\pi, 1) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(3\pi/2 + 2k\pi + t, 1) - f(3\pi/2 + 2k\pi, 1)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin(3\pi/2 + 2k\pi + t)}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos t}}{t}.\end{aligned}$$

Poslední limita neexistuje protože limita zleva $(-1/\sqrt{2})$ se nerovná limitě zprava $(1/\sqrt{2})$. Parciální derivace funkce f existují pouze na vnitřku množiny M a jsou tam spojité. Proto v bodě $[0,1]$ existuje totální diferenciál, a tedy tečná rovina, která má tvar

$$z = 1 + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot(y-1).$$

Příklad A3 : Položme

$$F(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \cos(xy)\cdot y - \sin(xy)\cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \cos(xy)\cdot x - \sin(xy)\cdot x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(\pi,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi,0) = \pi \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[\pi,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{gathered}\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) = 1, \\ \cos(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x)) - \sin(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x)) = 0, \\ -\sin(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2 + \cos(x\varphi(x))\cdot(2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) \\ -\cos(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x))\cdot(2\varphi'(x)+x\varphi''(x)) = 0.\end{gathered}$$

2d

Příklad E2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro funkci f platí:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{pro } x^2+y^2 \le 1; \\ 2-x^2-y^2 & \text{pro } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

V bodech $[x, y]$, kde $x^2 + y^2 \neq 1$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x^2+y^2 < 1; \\ -2x & \text{pro } x^2+y^2 > 1; \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{pro } x^2+y^2 < 1; \\ -2y & \text{pro } x^2+y^2 > 1; \end{cases}.$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $x^2+y^2 = 1$. Uvažujme bod $[x_0, y_0]$ takový, že $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Počítejme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0) - f(x_0,y_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{(x_0+t)^2 + y_0^2, 2-(x_0+t)^2 - y_0^2\} - 1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{1+2x_0t+t^2, 1-2x_0t-t^2\} - 1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{2x_0t+t^2, -2x_0t-t^2\}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} -|2x_0t+t^2|/t = \begin{cases} 0 & \text{pro } x_0 = 0 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x_0 \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii funkce f lze parciální derivaci podle y počítat analogicky.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2+y^2 = 1,\ x \neq 0\},$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2+y^2 = 1,\ y \neq 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -3 - 2\cdot(x-1) - 4\cdot(y-2).$$

Příklad E3 : Položme

$$F(x,y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$, která obsahuje bod $[1, 1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} + y^x \log y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^y \log x + xy^{x-1} - 2.$$

2e

Příklad C2 : Funkce f je definována na množině $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ y > 0\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x < 0,\ y < 0\}$. V bodech $[x,y] \in \mathcal{D}(f)$, kde $x \neq y$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{3}\left(\log\frac{x}{y}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{x}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{1}{3}\left(\log\frac{x}{y}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{y}
\end{aligned}$$

V bodech z definičního oboru, kde $y = x$, zkusme počítat parciální derivace podle definice

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,x)-f(x,x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{\log\left(\frac{x+t}{x}\right)}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{x}\right)}{\frac{t}{x}}\cdot\frac{\frac{t}{x}}{t^3}} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } x > 0, \\ -\infty & \text{pro } x < 0; \end{cases} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(y,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(y,y+t)-f(y,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{\log\left(\frac{y}{y+t}\right)}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} -\sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{y}\right)}{\frac{t}{y}}\cdot\frac{\frac{t}{y}}{t^3}} = \begin{cases} -\infty & \text{pro } y > 0, \\ +\infty & \text{pro } y < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -\sqrt[3]{\log 2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}}\cdot(x-1) - \frac{1}{6}\frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}}\cdot(y-2).$$

Příklad C3 : Položme

$$F(x,y) = \log(x^2+y^2+\cos(xy)) + y.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G (lze ukázat, že dokonce $G = \mathbb{R}^2$) obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{x^2+y^2+\cos(xy)}\cdot(2x - \sin(xy)\cdot y), \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{x^2+y^2+\cos(xy)}\cdot(2y - \sin(xy)\cdot x) + 1.
\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje

Pokud $x \neq 0$, je hodnost matice rovna 3. V případě, že $x = 0$, je hodnost matice A rovna 2.

2f

Příklad F2 : Funkce f je definována na $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Pro funkci f platí:

$$f(x, y) = \exp(y^x \log x).$$

V bodech $[x, y] \in \mathcal{D}(f)$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků":

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \exp(y^x \log x) \cdot \left(y^x \cdot \log y \cdot \log x + y^x \cdot \frac{1}{x} \right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \exp(y^x \log x) \cdot \left(x y^{x-1} \cdot \log x \right).$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 1 + 2 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 2).$$

Příklad F3 : Položme

$$F(x, y) = y^3 x^2 + y^2 x^2 + \sin y.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2y^3 x + 2y^2 x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 x^2 + 2y x^2 + \cos y.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\varphi(x)^3 x^2 + \varphi(x)^2 x^2 + \sin \varphi(x) = 0.$$

Postupně obdržíme

$$3\varphi(x)^2 \varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)^3 x + 2\varphi(x)\varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)^2 x + \cos \varphi(x) \cdot \varphi'(x) = 0,$$
$$6\varphi(x)\varphi'(x)\varphi'(x) x^2 + 3\varphi(x)^2 \varphi''(x) x^2 + 6\varphi(x)^2 \varphi'(x) x + 6\varphi(x)^2 \varphi'(x) x$$
$$+2\varphi(x)^3 + 2\varphi'(x)\varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) x^2 + 4\varphi(x)\varphi'(x) x$$
$$+4\varphi(x)\varphi'(x) x + 2\varphi(x)^2 - \sin \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\varphi'(x) + \cos \varphi(x) \cdot \varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 0$.

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&1&0&0&0\\0&1&0&4&1&0&-1&0\\0&2&1&2&1&1&0&0\\0&-5&-3&-3&-1&0&0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&1&3&1&0&0&0\\0&1&0&4&1&0&-1&0\\0&0&1&-6&-1&1&2&0\\0&0&-3&17&4&0&-5&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&1&0&0&0\\0&1&0&4&1&0&-1&0\\0&0&1&-6&-1&1&2&0\\0&0&0&-1&1&3&1&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&1&3&1&0&0&0\\0&1&0&4&1&0&-1&0\\0&0&1&-6&-1&1&2&0\\0&0&0&1&-1&-3&-1&-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0&4&9&3&3\\0&1&0&0&5&12&3&4\\0&0&1&0&-7&-17&-4&-6\\0&0&0&1&-1&-3&-1&-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&0&0&11&26&7&9\\0&1&0&0&5&12&3&4\\0&0&1&0&-7&-17&-4&-6\\0&0&0&1&-1&-3&-1&-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&2&1&1\\0&1&0&0&5&12&3&4\\0&0&1&0&-7&-17&-4&-6\\0&0&0&1&-1&-3&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Platí tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&1&1\\5&12&3&4\\-7&-17&-4&-6\\-1&-3&-1&-1\end{pmatrix}.$$

2g

Příklad G2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x, y] \neq [0, 0]$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{x}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{y}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

V bodě $[0, 0]$ spočítáme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\operatorname{arctg}(\sqrt{t^2}))^4}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}(|t|)}{|t|}\right)^4 \cdot \frac{|t|^4}{t} = 0.$$

Vzhledem k symetrii funkce f platí také $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = (\operatorname{arctg}\sqrt{5})^4 + \frac{2}{3}(\operatorname{arctg}\sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x-1) + \frac{4}{3}(\operatorname{arctg}\sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (y-2).$$

Příklad G3 : Položme

$$F(x, y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

Pokud $x = 2$, pak $h(A) = 3$. V případě, že $x \neq 2$, pak lze číslem $x - 2$ dělit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{x-1}{x-2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Poslední řádek je nulový, právě když $\frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} = 0$, tj. právě když $x = 7$.

Závěr: $h(A) = 2$ pro $x = 7$, $h(A) = 3$ pro $x \neq 7$.

2b

Příklad H2 : Okamžitě vidíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Pokud $x \neq 0$ lze v bodě $[x, y]$ počítat parciální derivace „podle vzorečků".

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \cos(x \cos y) \cdot \cos y & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot \sin y & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \cos(x \cos y) \cdot (-x \sin y) & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot (x \cos y) & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

V bodech tvaru $[0, y]$ budeme počítat parciální derivace „z definice":

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, y) - f(t, 0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, y)}{t}$$

Tato limita ovšem neexistuje, protože limita zleva $(-\infty)$ se nerovná limitě zprava $(\cos y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = \lim_{t \to y} \frac{f(0, t) - f(0, y)}{t - y} = \lim_{t \to y} \frac{0}{t - y} = 0.$$

V bodě $[1, 2]$ jsou obě parciální derivace spojité, a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \cos(\cos 2) \cdot \cos 2 \cdot (x - 1) - \cos(\cos 2) \cdot \sin 2 \cdot (y - 2) + \sin(\cos 2).$$

Příklad H3 : Položme

$$F(x, y) = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2).$$

Bod $[0, 0]$ je ve vnitřku definičního oboru funkce F - můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce F na jistém okolí G bodu $[0, 0]$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}.$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu $[0, 0]$ spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno spočteme: $x_1 = -2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -3.$

2i

Příklad I2 : Pro definiční obor platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x + y = 1\}$. Pro parciální derivace platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{xy - x - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad [x,y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0,0]\};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy - x^2 - y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad [x,y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0,0]\}.$$

V bodě $[0,0]$ počítejme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{t^2}}{t-1}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{(t-1)t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sgn} t}{t-1}.$$

Poslední limita neexistuje, protože limita zleva je rovna 1 a zprava je rovna -1. To znamená, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neexistuje. Naprosto stejným postupem lze ukázat, že ani $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje.

V bodě $[1,2]$ jsou obě parciální derivace spojité a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \frac{-3}{4\sqrt{5}} \cdot (x-1) - \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot (y-2) + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Příklad I3 : Položme

$$F(x,y) = \operatorname{arctg}(y^2 + xy) - e^{xy} + \cos x - y.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1 + (y^2+xy)^2} - e^{xy}y - \sin x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2y + x}{1 + (y^2+xy)^2} - e^{xy}x - 1.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy

3 3. Funkce $f(x,y)$ definovaná v $\mathbb{R}^2$ předpisem $f(x,y) := 1$, je-li y racionální, a $f(x,y) := 0$, je-li y iracionální, má parciální derivaci podle x rovnou 0 všude v $\mathbb{R}^2$, zatímco její parciální derivace podle y neexistuje nikde. $\square$

Definice. Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ a nechť $a \in \mathbb{R}^p$; říkáme, že lineární forma $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ je **diferenciál funkce f v bodě** a, je-li

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0. \tag{22}$$

Tento diferenciál (tedy formu L) budeme značit $Df(a)$, jeho hodnotu v bodě $h \in \mathbb{R}^p$ (tj. q-rozměrný vektor $L(h)$) zapíšeme ve tvaru $Df(a;h)$. Existuje-li $Df(a)$, říkáme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a. $\square$

Je zřejmé, že *funkce $f = (f_1, \ldots, f_q)$ je diferencovatelná v bodě a, právě když jsou v bodě a diferencovatelné všechny funkce f_j, kde $j = 1, \ldots, q$; je-li podmínka splněna, je*

$$Df(a) = (Df_1(a), \ldots, Df_q(a)). \quad \square \tag{23}$$

Poznámka 14.7. Jak je dobře známo z algebry, existuje pro každou lineární formu $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ právě jedna matice

$$\Lambda = (\lambda_{ji})_{1 \le j \le q,\, 1 \le i \le p} \tag{24}$$

typu $q \times p$ tak, že rovnost $y = L(x)$ je ekvivalentní s maticovou rovností

$$y = \Lambda x, \tag{25}$$

kde vpravo je maticový součin matice Λ s vektorem x, který je třeba v této souvislosti považovat za vektor *sloupcový*, tedy za matici typu $p \times 1$; vlevo je sloupcový vektor y, tentokrát ovšem matice typu $q \times 1$. (Chceme-li zdůraznit, že y a x jsou sloupcové vektory, můžeme psát např. $y^{sl} = \Lambda x^{sl}$.)

Rovnost (25) lze podrobněji napsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{q1} & \lambda_{q2} & \ldots & \lambda_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_p \end{pmatrix}, \tag{25'}$$

což je ekvivalentní se zápisem

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \ldots + \lambda_{1p}x_p, \\ y_2 &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{2p}x_p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_q &= \lambda_{q1}x_1 + \lambda_{q2}x_2 + \ldots + \lambda_{qp}x_p. \end{aligned} \tag{26}$$

4

Řešení. Totální diferenciál funkce p v libovolném bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existuje, protože parciální derivace $\frac{\partial p}{\partial x}(x, y) = -2x + 2$ a $\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = -2y + 4$, a to jsou spojité funkce dvou proměnných. Tečná rovina ke grafu funkce p v bodě $(x_0, y_0, p(x_0, y_0))$ je tedy

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$
$$z = p(x_0, y_0) + (-2x_0 + 2)(x - x_0) + (-2y + 4)(y - y_0)\}.$$

Má-li být kolmá k (násobkům) vektoru $(1, 1, 1)$, musí být vektor

$$(x - x_0, y - y_0, (-2x_0 + 2)(x - x_0) + (-2y_0 + 4)(y - y_0))$$

kolmý k $(1, 1, 1)$ pro každá $x, y \in \mathbb{R}^2$. Skalární součin těchto vektorů

$$x - x_0 + y - y_0 + (-2x_0 + 2)(x - x_0) + (-2y + 4)(y - y_0)$$

musí být roven nule pro každá $x, y \in \mathbb{R}$. Musí být tedy $3 - 2x_0 = 5 - 2y_0 = 0$. Máme tedy $T = \{(x, y, p(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) - (x - \frac{3}{2}) - (y - \frac{5}{2}))\colon x, y \in \mathbb{R}\}$. Položíme-li $x = y = 0$, dostáváme, že hledaný bod na ose z je $(0, 0, \frac{17}{2})$. ■

§57. Druhý diferenciál a konvexita. Druhým diferenciálem funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě a se v moderní literatuře obvykle rozumí symetrická bilineární forma $d^2 f(a)$, pro kterou platí $d^2 f(a)(s, t) = d_t(d_s f)(a)$ pro libovolná $s, t \in \mathbb{R}^n$. Při zkoumání vlastností funkce f nás bude zajímat především kvadratická forma $h \mapsto d^2 f(a)(h, h)$, která ovšem jednoznačně určuje symetrickou bilineární formu druhého diferenciálu, a proto nedojdeme ke špatným výsledkům, i když budeme za druhý diferenciál považovat tuto kvadratickou formu (jak tomu je např. v [DII]). Navíc si připomeňme, že (odpovídající) kvadratická či bilineární forma druhého diferenciálu je určena symetrickou čtvercovou (Hessovou) maticí druhých parciálních derivací $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a))_{i,j=1,\ldots,n}$[2] a že druhý diferenciál v a existuje, pokud jsou všechny druhé parciální derivace spojité na nějakém okolí bodu a.

Ani libovolně hladké funkce více proměnných, na rozdíl od funkcí jedné proměnné, nemusí být konvexní ani konkávní na žádné otevřené konvexní podmnožině definičního oboru (např. $f(x, y) = x^2 - y^2$). Pro reálnou funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, která má spojité druhé parciální derivace na otevřené podmnožině $\mathbb{R}^n$ tedy může mít množina bodů a, ve kterých je f „lokálně konvexní (konkávní)“ (existuje otevřená koule se středem a, na které je f konvexní (konkávní)) doplněk s neprázdným vnitřkem. Vyšetřování („lokální“) konvexity (konkávnosti) se nám ovšem bude hodit při hledání lokálních extrémů a absolutních extrémů funkcí. Platí následující postačující podmínky:

[2] Užíváme klasické značení $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a)$. Často se můžete setkat s obráceným značením. V případě Hessovy matice to ovšem díky její symetrii nehraje roli.