4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Heine)**.** Nechť (X,ρ), (Y,σ) jsou metrické prostory, $f: X \to Y$, $M \subset X$, $a \in M'$, $b \in Y$. Pak

$$\lim_{x\to a, x\in M} f(x) = b$$

právě tehdy, když: pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset M \setminus \{a\}$ platí

$$x_n \to a \implies f(x_n) \to b.$$

Věta 2 (Aritmetika limit)**.** Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $M \subset X$, $a \in M'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nechť $\lim_{x\to a, x\in M} f(x) = \alpha$ a $\lim_{x\to a, x\in M} g(x) = \beta$. Pak

1. $\lim_{x\to a, x\in M} f(x) + g(x) = \alpha + \beta$
2. $\lim_{x\to a, x\in M} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$
3. $\lim_{x\to a, x\in M} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$, pokud $\beta \neq 0$.

Věta 3 (O limitě složeného zobrazení)**.** Nechť (X,ρ), (Y,σ) a (Z,τ) jsou metrické prostory, $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$. Nechť $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a nechť platí:

1. $\exists \delta > 0$: $g((P(a,\delta) \cap A) \subset B$
2. $\lim_{x\to a, x\in A} g(x) = b$
3. $\lim_{y\to b, y\in B} f(y) = c$

Nechť platí jedna z podmínek

(P) $\exists \eta > 0$: $b \notin g((P(a,\eta) \cap A)$

(S) zobrazení f je spojité v bodě b vzhledem k B.

Pak

$$\lim_{x\to a, x\in A} f(g(x)) = c.$$

Věta 4 (2 policajti)**.** Nechť existuje prstencové okolí $P(x_0, y_0)$ takové, že na $P(x_0, y_0)$ platí

$$h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y).$$

Nechť dále

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} h(x,y) = L = \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} g(x,y),$$

$L \in \mathbb{R}$. Pak také existuje

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L.$$

Věta 5 (Omezená krát nulová)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a a buď hromadným bodem množiny M. Nechť f je omezená funkce na průniku nějakého prstencového okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ a množiny M a nechť

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} g(x) = 0.$$

Potom

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x)g(x) = 0.$$

Poznámka 6 (O dvojnásobné limitě)**.** Pokud existují limity $\lim_{x \to x_0}(\lim_{y \to y_0} f(x, y) = L_1$ a $\lim_{y \to y_0}(\lim_{x \to x_0} f(x, y) = L_2$ a $L_1 \neq L_2$, tak limita $\lim_{[x,y] \to [x_0, y_0]} f(x, y)$ neexistuje. Opačné tvrzení neplatí.

Věta 7. 1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$ buď hromadným bodem množiny M. Jestliže

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = L, \qquad \text{potom} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} |f(x)| = |L|.$$

2. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$ buď hromadným bodem množiny M. Potom

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = 0, \qquad \text{právě když} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} |f(x)| = 0.$$

Věta 8. Polární souřadnice zavedeme vztahy $x = x_0 + r\cos\varphi$, $y = y_0 + r\sin\varphi$, kde $r > 0$ a $\varphi \in [0; 2\pi)$.

Pak pokud $L \in \mathbb{R}$ a existuje nezáporná funkce $g(r)$ taková, že

$$\lim_{r \to 0+} g(r) = 0 \qquad \text{a} \qquad |f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - L| \leq g(r)$$

pro každé r z nějakého pravého prstencového okolí 0 a každé $\varphi \in [0; 2\pi)$, pak

$$\lim_{[x,y] \to [x_0, y_0]} f(x, y) = L.$$

Speciálně pokud po transformaci dostaneme $f(x, y) = g(r)h(\varphi)$, kde $\lim_{r \to 0+} g(r) = 0$ a $h(\varphi)$ je omezená pro $\varphi \in [0; 2\pi)$, pak

$$\lim_{[x,y] \to [x_0, y_0]} f(x, y) = 0.$$

Hinty

$2|xy| \le x^2 + y^2$

Příklady

1. Určete definiční obor (příklady ze zkoušek)

   (a) $f(x,y) = \arcsin\,(x+y) + \arctan\,(x+y) + xy$

   (b) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x}{|x|-|y|}\right)$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$

   (d) $f(x,y) = \arcsin\,\sqrt{x(x+y)}$

2. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.

   (a) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ platí

   $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1$$

   ale

   $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje.

   (b) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ platí

   $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$

   ale

   $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje.

   (c) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ limity

   $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ a $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ neexistují, ale

   $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ vzhledem k definičnímu oboru funkce f existuje a je rovna 0.

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{(|x|+(y-2)^2)y}-1}{(|x|+(y-2)^2)}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}}$

3. Spočtěte limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují

(a) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y}$

(b) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1}$

(c) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[1,2]} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}$

(d) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[2,0]} \frac{\tan xy}{y}$

(e) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} x\frac{xy}{x^2+y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \left(1+\frac{2}{|x|+|y|+|z|}\right)^{|x|+|y|+|z|}$

4. Spočtěte limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují

(a) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} e^{-x^2-y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$

(c) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x+y}{x-y}$

(d) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x-5y}{7x+y}$

(e) $\displaystyle\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \frac{\sin xyz}{x}$

(f) $\displaystyle\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} x\sin\frac{1}{x-y+z}$

5. Spočtěte limity transformací do polárních souřadnic

(a) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1-\cos^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

- (2d) Vytkneme $(x-y)$
- (2e) Rozšíříme odmocninu
- (3b) Vytkneme $(x+1)$