3. cvičení

kunck6am@natur.cuni.cz
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php`

1

Definice 1. *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici (X, ρ), kde X je množina, $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(1) $\forall x, y \in X : \ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(2) $\forall x, y \in X : \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(3) $\forall x, y, z \in X : \ \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Funkci ρ nazýváme *metrika na* X.

Úloha 2. Určete, zda jsou následující objekty metrickým prostorem:

1. Na prostoru $\mathbb{C}([0, 2])$ spojitých funkcích na $[0, 2]$ uvažujme
$$\rho(f, g) = |f(1) - g(1)|.$$
Řešení: Nesplňuje 1. podmínku, funkce $f = x$ a $g = x^2$ mají nulovou vzdálenost, ale nejsou totožné. Tzv. pseudometrika.

2. Na $\mathbb{R}$ uvažujme
$$\rho(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ 1, & x < y. \end{cases}$$
Řešení: Nesplňují symetrii. Tzv. kvazimetrika.

3. Prostor $\mathbb{R}^2$ s funkcí $\rho(x, y) = \rho_2(x, x_0) + \rho_2(x_0, y)$, kde x_0 značí počátek $(0, 0)$. Jedná se tedy o strukturu, kde při měření vzdálenosti dvou bodů musíme vždy projít počátkem.
Řešení: Ano, jedná ~~se o~~ metriku. nefunguje $\rho(x,x) = 0$

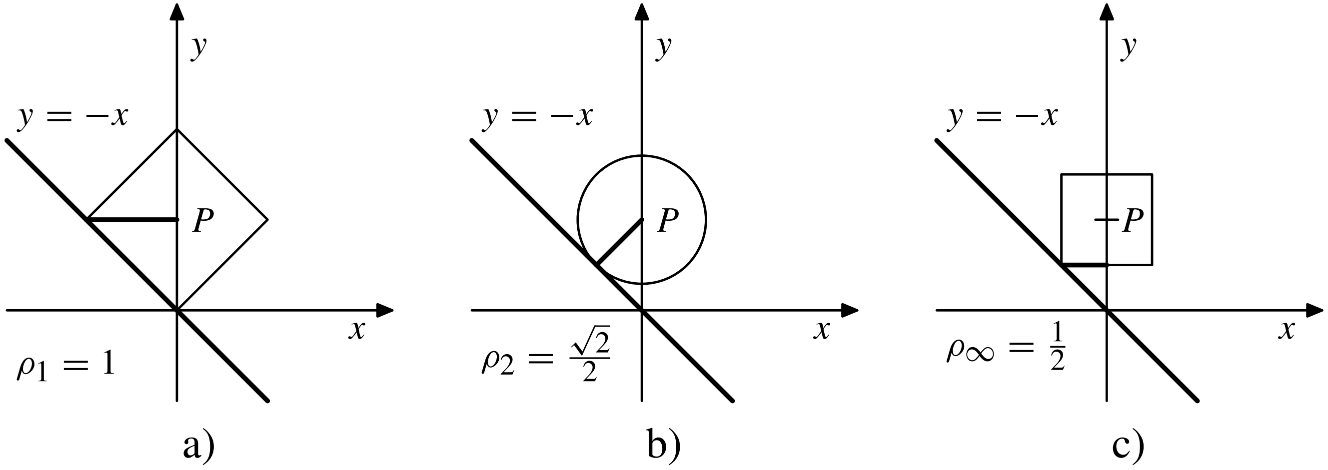
4. Taxi: Vzdálenost dvou míst v Praze měříme jako nejkratší možnou dráhu ujetou autem.
Řešení: Není symetrická - kvůli jednosměrkám.

Definice 3. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, a $x \in X$. *Vzdáleností bodu x od množiny A* rozumíme číslo
$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y);\ y \in A\}.$$

Poznámka 4. Množinu $\mathbb{R}^n$ uvažujeme s metrikami
$$\rho_\infty(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|, \quad \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Úloha 5. Na $\mathbb{R}^2$ najděte vzdálenost bodu $P = [0, 1]$ od přímky $y = -x$ v metrice

1. ρ_1
2. ρ_2
3. ρ_∞



Obrázek 4: Vzdálenost bodu od přímky v metrikách ρ_1, ρ_2, ρ_∞

Příklady 1.9.

i) Určete vzdálenost bodu $P = [0, 1]$ od přímky $y = -x$ v součtové, euklidovské a maximální metrice.

Řešení. Uvědomíme-li si, jak vypadají množiny bodů mající od bodu P stejnou vzdálenost, můžeme úlohu řešit v grafickém znázornění. ▲

ii) Určete vzdálenost přímky $y = c$, $c \leq 0$, od paraboly $y = x^2 - 2x + 1$ v metrikách ρ_1, ρ_2, ρ_∞.

Řešení. Z polohy paraboly vidíme, že vzdálenost přímky $y = c$ od této paraboly je ve všech třech metrikách rovna $|c|$. (Porovnejte tento výsledek s výsledkem Cvičení 1.4 ii) a všimněte si, že každý z bodů $[x, c]$, $x \in [1+c, 1-c]$ má v metrice ρ_∞ od paraboly vzdálenost rovnu c.) ▲

Úloha 6. V prostoru $\mathbb{C}([0,1])$ uvažujeme supremovou metriku

$$\rho_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Najděte nejmenší vzdálenost funkce $f(t) = t$ od podprostoru tvořeného konstantními funkcemi.

(ii) Prostor $H^1(a,b)$ funkcí f takových, že $f \in L^2(a,b)$ a

$$\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2\right)^{1/2} < \infty$$

se skalárním součinem $\langle f, g\rangle = \int_a^b [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)]dt$ je úplný unitární prostor.

(iii) Prostor l^2 je unitární prostor se skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Tento součin indukuje normu $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$.

Definice 1.8 Nechť $\mathbb{V}$ je unitární prostor a M je jeho podprostor. Podprostor

$$M^{\perp} = \{x \in \mathbb{V},\ \langle x, m\rangle = 0 \text{ pro každé } m \in M\}$$

se nazývá *ortogonální doplněk podprostoru* M ve $\mathbb{V}$.

Věta 1.3 Nechť $\mathbb{V}$ je unitární prostor a M je jeho podprostor. Pak libovolné $x \in \mathbb{V}$ lze vyjádřit jako $x = y + z$, kde $y \in M$, $z \in M^{\perp}$ a pro vzdálenost $\varrho(x, M)$ platí:

$$\varrho(x, M) = \|z\| = \sqrt{\langle z, z\rangle}.$$

Příklady

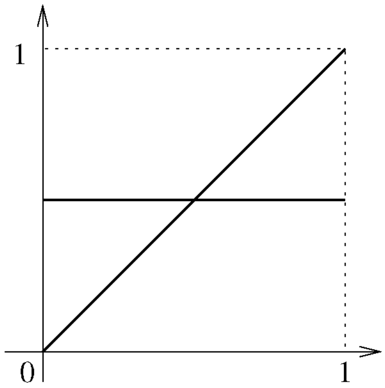
Příklad 1.1 V prostoru $C[0,1]$ najděte nejmenší vzdálenost funkce

1. $x_0(t) = t$ od podprostoru tvořeného konstantními funkcemi
2. $x_0(t) = t^2$ od podprostoru $L = \mathrm{Lin}\{1, t\}$

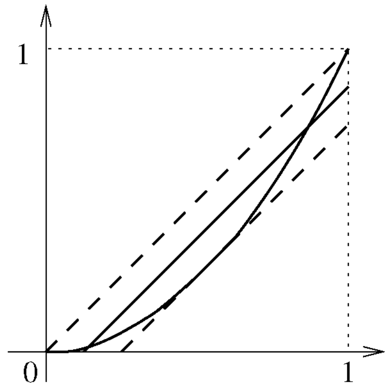
Řešení:

1. Hledáme $c \in \mathbb{R}$, aby $\max\limits_{t\in[0,1]} |t-c|$ bylo co nejmenší. Zřejmě je tedy $c = \frac{1}{2}$ a $\varrho\left(t, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ (viz graf 1.1(a)).
2. Prvky podprostoru L lze zapsat ve tvaru $\alpha + \beta t$, z grafu 1.1(b) je zřejmé, že zvolíme $\beta = 1$. Budeme tedy hledat funkci $t + \alpha$, aby $\max\limits_{t\in[0,1]} |t^2 - t - \alpha|$ bylo co nejmenší. Derivováním dostaneme extrém v bodě $t_0 = \frac{1}{2}$. Sestrojíme tečnu funkce x_0 v bodě t_0: $x - \frac{1}{4} = t - \frac{1}{2}$, po úpravě $x = t - \frac{1}{4}$. Hledaná funkce bude zřejmě mezi touto tečnou a funkcí $x = t$. Tedy nejmenší vzdálenost získáme pro $\alpha = -1/8$ a

$$\varrho\left(t^2, t - 1/8\right) = |t^2 - t + 1/8|_{t=1/2} = 1/8.$$



(a) Graf funkce $x_0 = t$ a $x = 1/2$



(b) Grafy funkcí $x_0 = t^2$ a $x = t - 1/8$ plnou čarou, graf $x = t$ a tečny $x = t - 1/4$ čárkovaně.

Příklad 1.2 Určete vzdálenost funkce $x(t) = t^2$ od prostoru $M = \mathrm{Lin}\{1, t\}$ v prostoru $L^2(0,1)$ a funkci x vyjádřete ve tvaru $x = y + z$, kde $y \in M$ a $z \in M^\perp$.

Řešení: K určení vzdálenosti nejdříve vyjádříme x pomocí y a z. Protože $y \in M$ platí $y = at + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Rovnici $x = y + z$ vynásobíme postupně 1 a t a získáme tak rovnice pro a a b:

$$x \cdot 1 = y \cdot 1 + z \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 t^2 dt = \int_0^1 (at + b)\, dt$$
$$x \cdot t = y \cdot t + z \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 t^3 dt = \int_0^1 t\,(at + b)\, dt$$

Po integraci dostáváme rovnice:

$$\begin{aligned} \tfrac{a}{2} + b &= \tfrac{1}{3} \\ \tfrac{a}{3} + \tfrac{b}{2} &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Po konečné úpravě máme $y = t - \frac{1}{6}$ a $z = x - y = t^2 - t + \frac{1}{6}$. Podle věty 1.3 je $\varrho^2(x, M) = \|z\|^2 = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2\, dt$, a tedy $\varrho(x, M) = \frac{\sqrt{5}}{30}$.

Příklad 1.3 Určete vzdálenost posloupnosti $x = \left\{1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ od podprostoru $M = \{x = \{x_k\}_{k=1}^\infty : x_1 = x_2\}$ v prostoru

1. l^1 2. l^2 3. l^∞.

Řešení:

1. Hledáme posloupnost $y \in M$, aby $\varrho\,(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|$ byla co nejmenší. Zřejmě $x_j = y_j$ pro $j \geq 3$. Pak $\varrho\,(x, y) = |1 - y_1| + |2 - y_2|$, přičemž $y_1 = y_2$. Proto hledaná vzdálenost $\varrho_1\,(x, M)$ je minimem funkce $f(t) = |1 - t| + |2 - t|$ a z grafu 1.2 získáme $\varrho_1\,(x, M) = 1$.

Poznámka 7. Nechť $p \in [1, \infty)$ a l_p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

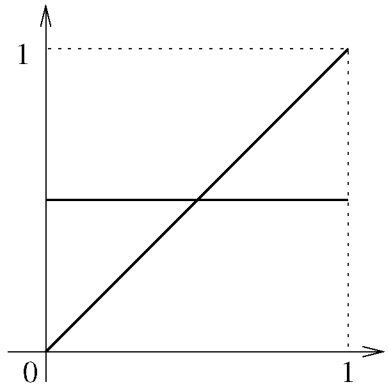
$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x - y|^p \right)^{1/p}.$$

Poznámka 8. Uvažujme množinu všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ Pak definujeme metriku

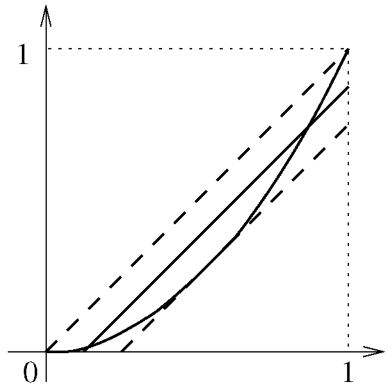
$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 9. Určete vzdálenost posloupnosti $x = \{1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ od množiny $M = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_1 = x_2\}$ v prostorech

1. l_1
2. l_2
3. l_∞



(a) Graf funkce $x_0 = t$ a $x = 1/2$



(b) Grafy funkcí $x_0 = t^2$ a $x = t - 1/8$ plnou čarou, graf $x = t$ a tečny $x = t - 1/4$ čárkovaně.

Příklad 1.2 Určete vzdálenost funkce $x(t) = t^2$ od prostoru $M = \mathrm{Lin}\{1, t\}$ v prostoru $L^2(0, 1)$ a funkci x vyjádřete ve tvaru $x = y + z$, kde $y \in M$ a $z \in M^{\perp}$.

Řešení: K určení vzdálenosti nejdříve vyjádříme x pomocí y a z. Protože $y \in M$ platí $y = at + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Rovnici $x = y + z$ vynásobíme postupně 1 a t a získáme tak rovnice pro a a b:

$$
\begin{aligned}
x \cdot 1 = y \cdot 1 + z \cdot 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^1 t^2 dt = \int_0^1 (at + b)\, dt \\
x \cdot t = y \cdot t + z \cdot t \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^1 t^3 dt = \int_0^1 t\,(at + b)\, dt
\end{aligned}
$$

Po integraci dostáváme rovnice:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{a}{2} + b &= \tfrac{1}{3} \\
\tfrac{a}{3} + \tfrac{b}{2} &= \tfrac{1}{4}
\end{aligned}
$$

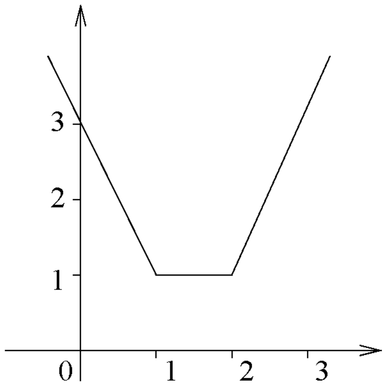
Po konečné úpravě máme $y = t - \frac{1}{6}$ a $z = x - y = t^2 - t + \frac{1}{6}$. Podle věty 1.3 je $\varrho^2(x, M) = \|z\|^2 = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2\, dt$, a tedy $\varrho(x, M) = \frac{\sqrt{5}}{30}$.

Příklad 1.3 Určete vzdálenost posloupnosti $x = \left\{1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ od podprostoru $M = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : x_1 = x_2\}$ v prostoru

1. l^1 2. l^2 3. l^{∞}.

Řešení:

1. Hledáme posloupnost $y \in M$, aby $\varrho\,(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|$ byla co nejmenší. Zřejmě $x_j = y_j$ pro $j \geq 3$. Pak $\varrho\,(x, y) = |1 - y_1| + |2 - y_2|$, přičemž $y_1 = y_2$. Proto hledaná vzdálenost $\varrho_1\,(x, M)$ je minimem funkce $f(t) = |1 - t| + |2 - t|$ a z grafu 1.2 získáme $\varrho_1\,(x, M) = 1$.



Obrázek 1.2: Graf funkce $f(t) = |1 - t| + |2 - t|$.

2. Podobně jako v prvním případě převedeme úlohu na hledání minima funkce $f^2(t) = (t-1)^2 + (t-2)^2$. Derivováním dostaneme minimum $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pro $t = \frac{3}{2}$. Proto $\varrho_2(x, M) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Opět hledáme t, aby $\max\{|t-1|, |t-2|\}$ bylo co nejmenší. Což je totéž, jako najít nejmenší vzdálenost bodu $[1, 2]$ a přímky $y = x$ v maximální metrice na $\mathbb{R}^2$. Snadno dostaneme $\varrho([1, 2], x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pro $x = \frac{3}{2}$ a proto $\varrho_\infty(x, M) = \frac{1}{2}$.

Části 1 a 2 lze také řešit analogicky jako část 3.

Příklad 1.4 V prostoru l^2 najděte vzdálenost posloupnosti $x = \{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$ od množiny $L_n = \left\{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$.

Řešení: Hledáme $y \in L_n$, aby $\varrho(x, y)$ byla co nejmenší. Zřejmě bude $y_k = 0$ pro všechna $k > n$. Metodou Lagrangeových multiplikátorů najdeme minimum funkce $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ vázané podmínkou $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Lagrangeova funkce je

$$L(x, \lambda) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - \lambda(x_1 + \cdots + x_n)$$

a hledáme řešení systému rovnic:

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= 0, \\ &\vdots \\ L_{x_n} &= 0, \\ x_1 + \cdots + x_n &= 0. \end{aligned}$$

Pro první proměnnou platí

$$L_{x_1} = 2(x_1 - 1) - \lambda = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda}{2} + 1.$$

2

Definice 10. Nechť $x \in X$, $r > 0$. *Otevřenou koulí* rozumíme množinu

$$B(x,r) = \{y \in X; \rho(x,y) < r\}$$

Uzavřenou koulí rozumíme množinu

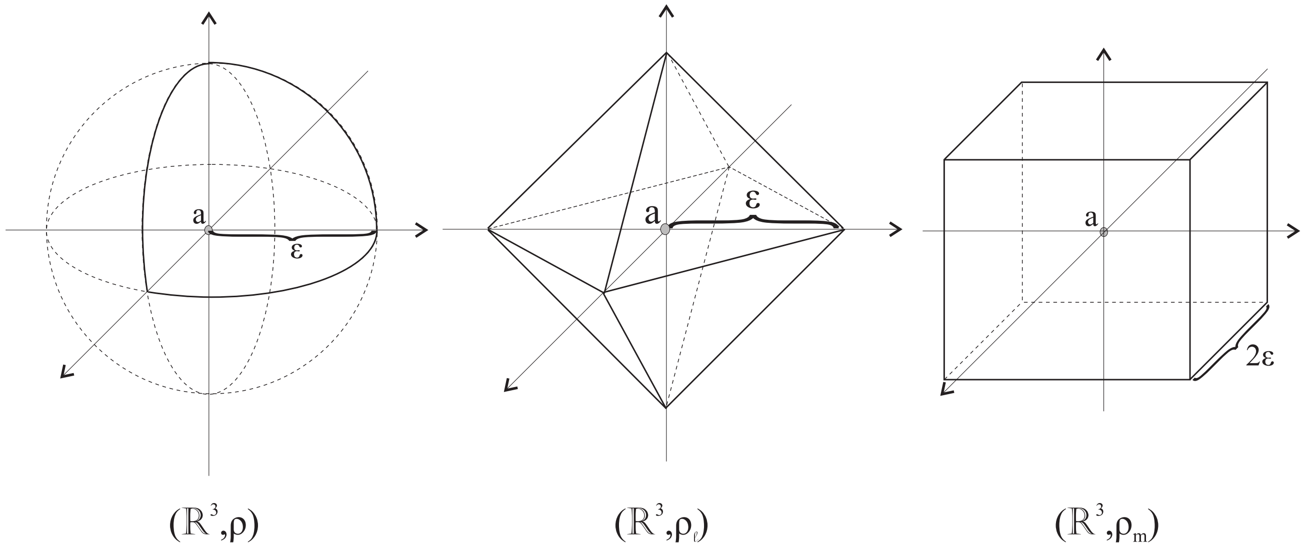
$$\bar{B}(x,r) = \{y \in X; \rho(x,y) \leq r\}$$

Úloha 11. Načrtněte jednotkovou kouli v prostoru (R^3, ρ_1), (R^3, ρ_2), (R^3, ρ_∞).

- množina $\overline{\Omega}(a, \varepsilon) = \{x \in (\mathcal{X}, \rho);\ \rho(x, a) \leq \varepsilon\}$ se nazývá *uzavřená koule se středem v bodě a a poloměrem ε*;

- množina $\mathcal{S}(a, \varepsilon) = \{x \in (\mathcal{X}, \rho);\ \rho(x, a) = \varepsilon\}$ se nazývá *sféra se středem v bodě a a poloměrem ε.*

Příklad:
Jak vypadá uzavřená koule $\overline{\Omega}(a, \varepsilon))$ v prostorech $(\mathbb{R}^3, \rho)$, $(\mathbb{R}^3, \rho_l)$ a $(\mathbb{R}^3, \rho_m)$?



5 Některé význačné body a množiny metrického prostoru

Definice 5.1 Nechť $\mathcal{X}$ je metrický prostor s metrikou ρ.

- Nechť $A \subset \mathcal{X}$. Bod $a \in A$ se nazývá *vnitřním bodem množiny A*, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že $\mathcal{U}(a) \subset A$. Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá *vnitřek množiny A* a značí se A° nebo int$A$.

- Množina A se nazývá *otevřená*, jestliže $A = A^\circ$.

- Nechť $A \subset \mathcal{X}$. Bod $a \in \mathcal{X}$ se nazývá *hromadným bodem množiny A*, jestliže každé jeho redukované okolí obsahuje aspoň jeden bod $y \in A$ (nebo ekvivalentně, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů z množiny A). Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá *derivace množiny A* a značí se A'.

- Bod $a \in A$, který není hromadným bodem množiny A se nazývá *izolovaným bodem množiny A.*

Úloha 12. Jak vypadá koule v diskrétním metrickém prostoru?

Řešení: V diskrétní metrice závisí koule na poloměru. Je-li $r \leq 1$, splyne koule se svým středem: $B(x,r) = \{x\}$. Pro $r > 1$ se koule bude rovnat celému prostoru: $B(x,r) = X$.

Definice 13. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků X. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* k $y \in X$ v (X, ρ), jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y) = 0$. Prvek y nazýváme *limitou posloupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v (X, ρ). *Konvergentní posloupností v* (X, ρ) rozumíme každou posloupnost prvků X, která má limitu v (X, ρ).

Definice 14. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$. Řekneme, že množina M je *uzavřená* v X, jestliže platí: pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v M, splňující $x_n \to x$ pro nějaký prvek $x \in X$, pak platí: $x \in M$.

Definice 15. Nechť $M \subset X$, $x \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *vnitřním bodem množiny* M, jestliže existuje $r > 0$ splňující $B(x,r) \subset M$.

Množina $M \subset X$ se nazývá *otevřená v* (X, ρ), jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Poznámka 16.

1. Množina F v metrickém prostoru (X, ρ) je uzavřená právě tehdy, když $X \setminus F$ je otevřená.
2. Množina G v metrickém prostoru (X, ρ) je otevřená právě tehdy, když $X \setminus G$ je uzavřená.

Úloha 17. Určete, zda je interval $(0,1)$ otevřená či uzavřená množin v metrickém prostoru (X, ρ), jestliže

1. $X = (0,1)$, $\rho = \rho_1$,

   Řešení: Otevřená i uzavřená, protože celý prostor je vždy otevřený i uzavřený.

2. $X = \mathbb{R}$, $\rho = \rho_1$,

   Řešení: Otevřená.

3. $X = [0,1]$ s diskrétní metrikou,

   Řešení: Otevřená i uzavřená. Každá podmnožina diskrétního metrického prostoru je otevřená i uzavřená.

4. $X = (0,1) \cup (3,4)$, $\rho = \rho_1$.

   Řešení: Otevřená i uzavřená. Otevřená - každému bodu lze opsat malou kouli, která se vejde do intervalu $(0,1)$. Uzavřená - Stačí ukázat, že $(3,4)$ je otevřená (to se ukáže stejně). Doplněk pak musí být uzavřená.

Definice 18. Nechť $M \subset X$. Řekneme, že x je *hraničním bodem množiny* M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x,r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x,r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů nazýváme *hranice* a značíme ji ∂M.

Uzávěrem množiny M rozumíme množinu $\bar{M} = M \cup \partial M$.

Úloha 19. Určete, zda množina M je uzavřená, otevřená, co je její vnitřek, uzávěr, hranice (v $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou):

1. $M = (0, 1)$

   Řešení: Otevřená. $\operatorname{Int} M = (0, 1)$ ($\operatorname{Int} M$ značí vnitřek/všechny vnitřní body M). $\overline{M} = [0, 1]$. $\partial M = \{0, 1\}$.

2. $M = [0, 1]$

   Řešení: Uzavřená. $\operatorname{Int} M = (0, 1)$ $\overline{M} = [0, 1]$. $\partial M = \{0, 1\}$.

3. $M = (0, 1]$

   Řešení: Ani otevřená, ani uzavřená. $\operatorname{Int} M = (0, 1)$ $\overline{M} = [0, 1]$. $\partial M = \{0, 1\}$.

4. $M = (0, \infty)$

   Řešení: Otevřená. $\operatorname{Int} M = (0, \infty)$ $\overline{M} = [0, \infty)$. $\partial M = \{0\}$.

5. $M = [0, \infty)$

   Řešení: Uzavřená. $\operatorname{Int} M = (0, \infty)$ $\overline{M} = [0, \infty)$. $\partial M = \{0\}$.

6. $M = (-\infty, \infty)$

   Řešení: Otevřená i uzavřená. $\operatorname{Int} M = (-\infty, \infty)$ $\overline{M} = (-\infty, \infty)$. $\partial M = \emptyset$.

7. $\mathbb{N}$

   Řešení: Uzavřená. $\operatorname{Int} M = \emptyset$. $\overline{M} = \mathbb{N}$. $\partial M = \mathbb{N}$.

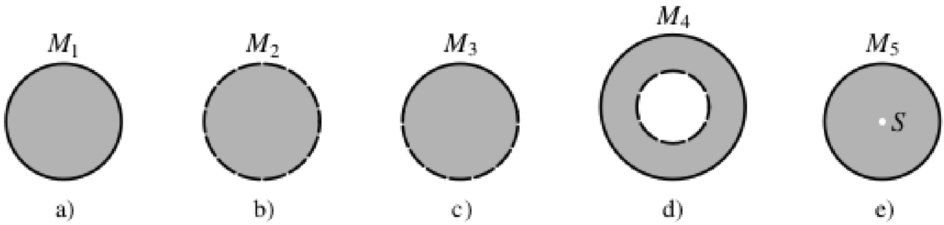
8. $\mathbb{Q}$

   Řešení: Ani uzavřená, ani otevřená. $\operatorname{Int} M = \emptyset$. $\overline{M} = \mathbb{R}$. $\partial M = \mathbb{R}$.

9. $\mathbb{R}$

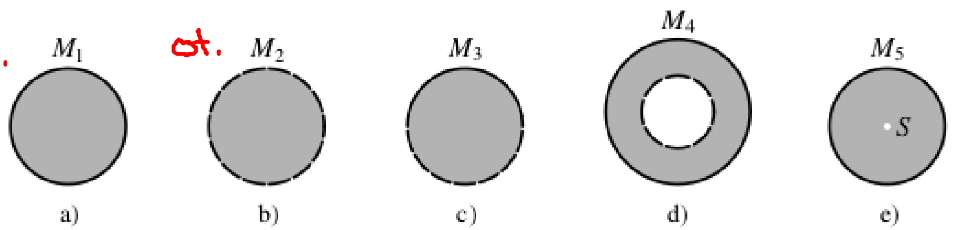
   Řešení: Otevřená i uzavřená. $\operatorname{Int} M = \mathbb{R}$. $\overline{M} = \mathbb{R}$. $\partial M = \emptyset$.

Úloha 20. Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, najděte hranici (v $\mathbb{R}^2$).



Úloha 20. Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, najděte hranici (v $\mathbb{R}^2$).

uz. ot.



~~uz~~ ~~uz~~ ~~uz~~

~~ot~~ ~~ot~~ ~~ot~~

$\partial M =$ (kružnice)

$\partial M =$ (2 kružnice)

$\partial M =$ (kružnice a bod)

Úloha 21. Rozhodněte, zda platí (v obecném metrickém prostoru):

1. $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$

10.10.3. Příklad. Označme symbolem ℓ^∞ množinu všech omezených posloupností reálných čísel. Definujme funkci $\|\cdot\|_{\ell^\infty}\colon \ell^\infty \to [0,\infty)$ předpisem

$$\|\{x_n\}\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ je normovaný lineární prostor.

10.10.4. Příklad. Označme symbolem c_0 množinu všech posloupností reálných čísel s nulovou limitou. Dokažte, že $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ je normovaný lineární podprostor prostoru c, a tedy také prostoru ℓ^∞.

10.10.5. Příklad. Nechť $p \in [1,\infty)$. Označme ℓ^p množinu všech posloupností reálných čísel $\{x_n\}$ splňujících

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Definujme funkci $\|\cdot\|_{\ell^p}\colon \ell^p \to [0,\infty)$ předpisem

$$\|\{x_n\}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dokažte, že $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ je normovaný lineární prostor.

10.10.6. Příklad. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Dokažte následující tvrzení:

(a) pro každé $x \in P$ a pro každé $r > 0$, platí $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$,

(b) opačná inkluze obecně neplatí.

Řešení. (a) Nechť $x \in P$, $r > 0$ a $y \in \partial B(x,r)$. Předpokládejme pro spor, že $\varrho(x,y) > r$. Položme $s = \varrho(x,y) - r$. Potom $s > 0$ a pro každé $z \in B(y,s)$ platí

$$\varrho(x,z) \geq \varrho(x,y) - \varrho(y,z) > \varrho(x,y) - s = r,$$

takže $z \notin B(x,r)$. To znamená, že $B(y,s) \cap B(x,r) = \emptyset$. To je ale spor s tím, že $y \in \partial B(x,r)$. Musí tedy platit $\varrho(x,y) \leq r$, a tedy $\partial B(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$. Celkem tedy máme

$$\overline{B(x,r)} = B(x,r) \cup \partial B(x,r) \subset \overline{B}(x,r).$$

(b) Nechť P je diskrétní metrický prostor obsahující alespoň dva různé body a $x \in P$. Potom

$$B(x,1) = \overline{B(x,1)} = \{x\},$$

ale $\overline{B}(x,1) = P$. Protože P má alespoň dva různé body, inkluze $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$ neplatí. ♣

10.10.7. Příklad. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $\{F_n\}$ je nerostoucí posloupnost uzavřených množin v P. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in F_n$, přičemž posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k nějakému bodu $x \in P$. Dokažte, že $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Řešení. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je dáno. Pak $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost bodů v F_k konvergující k x. Protože množiny F_k jsou uzavřené, platí $x \in F_k$. Tedy $x \in F_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, a proto $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. ♣

2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

   Řešení: Nikoli. Např. $A = (0,1)$, $B = (1,2)$. Pak $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, ale $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{[0,1] \cap [1,2]} = \overline{\{1\}} = \{1\}$.

Úloha 22. Najděte uzávěry grafů funkcí v $\mathbb{R}^2$

1. $$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   Řešení: Graf samotný sjednocen s úsečkou $\{[0,y], y \in [-1,1]\}$.

2. Dirichletova funkce

   Řešení: Osa x a přímka $y = 1$.

3. Riemannova funkce

   Řešení: Graf sjednocený s osou x.

3

Úloha 23. Nechť $0 < p \leq q < \infty$. Sestrojte množinu A tak, aby $\operatorname{diam} A = q$, a $\operatorname{diam} A^\circ = p$.
Řešení: Např $(0,p) \cup \{q\}$

Úloha 24. Najděte netriviální $A \subset \mathbb{R}$, aby splňovala následující

1. $\overline{A} = \partial A$

   Řešení: $\{1\}$

2. $\operatorname{Int} \overline{A} \supsetneq A$

   Řešení: $\mathbb{Q}$

3. $\operatorname{Int} \overline{A} \subsetneq A$

   Řešení: $[0,1)$

4. $\overline{\operatorname{Int} A} \subsetneq A$

   Řešení: $\mathbb{Q}$

5. $\overline{\operatorname{Int} A} \supsetneq A$

   Řešení: $(0,42]$

6. $\overline{\operatorname{Int} A} = A$

   Řešení: $[-3,5]$

Úloha 25. Je každá konečná podmnožina metrického prostoru nutně uzavřená?

Řešení: Ano. Z konečné podmnožiny nelze vykonvergovat ven, protože od jistého n_0 musí být konvergentní posloupnost konstantní.

Definice 26. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$, $x \in X$. Řekneme, že x je *hromadným bodem množiny* M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 : M \cap (B(x, r) \setminus \{x\}) \neq 0.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny M značíme M' a nazýváme ji *derivací množiny* M. Body z $M \setminus M'$ nazýváme *izolovanými body množiny* M.

Úloha 27. Co lze říci o otevřených množinách, jejichž každý bod je izolovaný?

Řešení: Že neexistují.

Definice 28. Množina $M \subset X$ se nazývá *omezená*, jestliže $\exists K \operatorname{diam}(M) < K$.

Úloha 29. Určete, zda množina M je omezená

1. $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 2\}$

   Řešení: Ano, jde o elipsu (s vnitřkem).

2. $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| \leq |y|\}$

   Řešení: Ne, patří tam např. celá osa y.

3. $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x - y| < 2\}$

   Řešení: Ne, patří tam např. přímka $y = x$.

4. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2 < xyz < 4\}$

   Řešení: Nikoli, jde o variaci na hyperbolické téma.

Poznámka 30. Nechť $(X, \rho$ a (Y, σ) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$ je spojité zobrazení. Pak pro otevřenou množinu G v (Y, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (X, ρ) a pro uzavřenou množinu F v (Y, σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (X, ρ).

Úloha 31. Najděte protipříklad na tvrzení:

1. pro otevřenou množinu G v (X, ρ) je $f(G)$ otevřená v (Y, σ) a

2. pro uzavřenou množinu F v (X, ρ) je $f(F)$ uzavřená v (Y, σ).

a označme ji symbolem $\{a_m\}$. V posloupnosti $\{a_m\}$ se každý prvek množiny D vyskytuje nekonečněkrát. Zřejmě platí $D \subset H(\{a_m\})$. Dále je $\{a_m;\ m \in \mathbb{N}\} \subset M$, takže z Příkladu 2.5.11 plyne, že $H(\{a_m\}) \subset M$.

Nechť $b \in M \cap \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $b \in I_{n,k} \subset B(b, \varepsilon)$. Z konstrukce posloupnosti $\{a_m\}$ pak plyne, že je množina $\{m \in \mathbb{N} : a_m \in B(b, \varepsilon)\}$ nekonečná. Protože ε bylo zvoleno libovolně, vyplývá odtud, že $b \in H(\{a_m\})$. Takže jestliže $M \subset \mathbb{R}$, pak $H(\{a_m\}) = M$, a tedy $\{a_m\}$ je hledaná posloupnost.

Jestliže $\infty \in M$, pak položíme

$$a'_m = \begin{cases} m, & \text{pokud } m \text{ je sudé,} \\ a_m, & \text{pokud } m \text{ je liché.} \end{cases}$$

Pak zřejmě platí $H(\{a'_m\}) = M$, a tedy jednou z možných hledaných posloupností je posloupnost $\{a'_m\}$. Je-li $-\infty \in M$, postupujeme obdobně. ♣

10.10.11. Příklad. Dokažte, že spojitý obraz uzavřené množiny nemusí být uzavřená množina a spojitý obraz otevřené množiny nemusí být otevřená množina.

Řešení. Uvažujme spojité zobrazení $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zobrazující $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ na $x \in \mathbb{R}$. Dále položme

$$A = \{[x, \frac{1}{x}];\ x \in (0, \infty)\}$$

Dokážeme, že A je uzavřená množina v $\mathbb{R}^2$. Definujme funkci $g : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x, y) = y - \frac{1}{x}$. Potom g je zřejmě spojitá. Navíc platí $A = g^{-1}(\{0\})$. Množina $\{0\}$ je kompaktní, a tedy uzavřená v $\mathbb{R}$, takže podle Věty 10.4.6 je A uzavřená v $(0, \infty)^2$, a tedy i v $\mathbb{R}^2$. Zřejmě však platí $\pi(A) = (0, \infty)$, což není uzavřená množina v $\mathbb{R}$.

Funkce $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce zobrazující otevřenou množinu $\mathbb{R}$ na $[-1, 1]$, což není otevřená množina. ♣

10.10.12. Příklad. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru P splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Dokažte, že množina $K = \{x_n; x \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ je kompaktní.

Řešení. Nechť $\mathcal{G}$ je nějaký systém otevřených podmnožin pokrývající K. Potom existuje $G \in \mathcal{G}$ taková, že $x \in G$. Protože $x_n \to x$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n \in G$. Pro každé $k \in \{1, \ldots, n_0\}$ existuje $G_k \in \mathcal{G}$ splňující $x_k \in G_k$. Potom soubor množin $\mathcal{G}^* = \{G, G_1, \ldots, G_{n_0}\}$ tvoří konečný podsystém systému $\mathcal{G}$, který zřejmě pokrývá K. Podle Věty 10.5.30 je tedy množina K kompaktní. ♣

10.10.13. Příklad. Nechť P je nekompaktní metrický prostor. Sestrojte neomezenou spojitou funkci $f : P \to \mathbb{R}$.

10.10.14. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $K \subset P$ je kompaktní, $F \subset P$ je uzavřená a $\operatorname{dist}(K, F) = 0$. Dokažte, že potom $K \cap F \neq \emptyset$.

Úloha 32. Mějme zobrazení $f : (\mathbb{R}, \rho_2) \to (\mathbb{R}, \rho_d)$, kde ρ_d značí diskrétní metriku. Co můžeme říct o f, jestliže víme, že je spojité?

Řešení. Nechť $f \in C[a,b]$ je libovolná funkce a $f_n \in C[a,b]$ je libovolná posloupnost konvergující k funkci f, tj. $\rho(f_n, f) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, jestliže $n \to \infty$. Z toho plyne, že i $\left|f_n\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \to 0$, tedy zobrazení F je spojité na $C[a,b]$. ▲

ii) Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $a \in P$, $A \subseteq P$. Dokažte, že zobrazení $f, g\colon P \to \mathbb{E}^1$ daná vztahy $f(x) = \rho(x, a)$, $g(x) = \rho(x, A)$ jsou spojitá.

Řešení. Nechť $x_n \to x_0$ je libovolná. Využitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme $|f(x_n) - f(x_0)| = |\rho(x_n, a) - \rho(x_0, a)| \le |\rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, a) - -\rho(x_0, a)| = \rho(x_n, x_0) \to 0$ pro $n \to \infty$, tedy $f(x_n) \to f(x_0)$ a f je spojité. V případě zobrazení g dostáváme $|g(x_n) - g(x_0)| = |\rho(x_n, A) - \rho(x_0, A)| \le \le |\rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, A) - \rho(x_0, A)| = \rho(x_n, x_0) \to 0$ (využili jsme nerovnosti $\rho(x, A) \le \rho(x, x_0) + \rho(x_0, A)$, kterou lze snadno dokázat pomocí trojúhelníkové nerovnosti a definice vzdálenosti bodu od množiny), tedy i zobrazení g je spojité. ▲

iii) Nechť ρ_d je diskrétní metrika na $\mathbb{R}$. Určete nutnou a dostatečnou podmínku, aby zobrazení $f\colon \mathbb{E}^1 \to (\mathbb{R}, \rho_d)$ bylo spojité.

Řešení. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ je libovolné a $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost reálných čísel konvergující k x_0 v metrice prostoru $\mathbb{E}^1$, tj. $|x_n - x_0| \to 0$. K tomu, aby zobrazení f bylo spojité v bodě x_0, je nutné a stačí, aby $f(x_n)$ konvergovala k $f(x_0)$ v diskrétní metrice. To je však možné tehdy a jen tehdy, když je posloupnost $\{f(x_n)\}$ skorostacionární, tj. od jistého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ je $f(x_n) = f(x_0)$. Protože $\{x_n\}$ je *libovolná* posloupnost konvergující k x_0, je toto možné, právě když f je konstantní zobrazení. Tedy zobrazení $f : \mathbb{E}^1 \to (\mathbb{R}, \rho_d)$ je spojité, právě když je konstantní, tj. existuje konstanta $k \in \mathbb{R}$ taková, že $f(x) = k$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. ▲

Cvičení 4.4.

i) Nechť ρ_d je diskrétní metrika na $\mathbb{R}$. Určete nutnou a dostatečnou podmínku, aby zobrazení $f : (\mathbb{R}, \rho_d) \to \mathbb{E}^1$ bylo spojité. (Doplněk k předchozímu příkladu).

ii) Nechť P je prostor komplexních čísel s obvyklou metrikou (tj. stejnou jako v $\mathbb{E}^2$). Rozhodněte, zda zobrazení $F(z) = |z|$, $G(z) = \bar{z}$ jsou spojitá.[1]

iii) Dokažte, že zobrazení $f : P \to Q$ je spojité, právě když pro každou množinu $A \subseteq P$ platí $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

iv) Dokažte, že zobrazení $f : P \to Q$ je spojité, právě když pro každou otevřenou podmnožinu $A \subseteq Q$ je množina $f^{-1}(A) = \{x \in P : f(x) \in A\}$ otevřená v P. Může být slovo otevřená v tomto tvrzení nahrazeno slovem uzavřená?

v) Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A, B \subseteq P$, $A \cap B = \emptyset$ jsou uzavřené podmnožiny v P. Dokažte, že existuje spojité zobrazení $f : P \to \mathbb{E}^1$ takové, že

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \in B. \end{cases}$$

[1] $\bar{z}$ značí číslo komplexně sdružené k z.