3. cvičení

kunck6am@natur.cuni.cz
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php`

1

Definice 1. *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici (X, ρ), kde X je množina, $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(1) $\forall x, y \in X: \ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(2) $\forall x, y \in X: \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(3) $\forall x, y, z \in X: \ \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Funkci ρ nazýváme *metrika na X*.

Úloha 2. Určete, zda jsou následující objekty metrickým prostorem:

1. Na prostoru $\mathbb{C}([0, 2])$ spojitých funkcích na $[0, 2]$ uvažujme
$$\rho(f, g) = |f(1) - g(1)|.$$
2. Na $\mathbb{R}$ uvažujme $\rho(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ 1, & x < y. \end{cases}$
3. Prostor $\mathbb{R}^2$ s funkcí $\rho(x, y) = \rho_2(x, x_0) + \rho_2(x_0, y)$, kde x_0 značí počátek $(0, 0)$. Při měření vzdálenosti dvou bodů musíme vždy projít počátkem.
4. Taxi: Vzdálenost dvou míst v Praze měříme jako nejkratší možnou dráhu ujetou autem.

Definice 3. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, a $x \in X$. *Vzdáleností bodu x od množiny A* rozumíme číslo
$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y);\ y \in A\}.$$

Poznámka 4. Množinu $\mathbb{R}^n$ uvažujeme s metrikami
$$\rho_\infty(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|, \quad \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Úloha 5. Na $\mathbb{R}^2$ najděte vzdálenost bodu $P = [0, 1]$ od přímky $y = -x$ v metrice

1. ρ_1
2. ρ_2
3. ρ_∞

Úloha 6. V prostoru $\mathbb{C}([0, 1])$ uvažujeme supremovou metriku

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Najděte nejmenší vzdálenost funkce $f(t) = t$ od podprostoru tvořeného konstantními funkcemi.

Poznámka 7. Nechť $p \in [1, \infty)$ a l_p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x - y|^p\right)^{1/p}.$$

Poznámka 8. Uvažujme množinu všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ Pak definujeme metriku

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 9. Určete vzdálenost posloupnosti $x = \{1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ od množiny $M = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_1 = x_2\}$ v prostorech

1. l_1
2. l_2
3. l_∞

2

Definice 10. Nechť $x \in X$, $r > 0$. *Otevřenou koulí* rozumíme množinu

$$B(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) < r\}$$

Uzavřenou koulí rozumíme množinu

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) \le r\}$$

Úloha 11. Načrtněte jednotkovou kouli v prostoru (R^3, ρ_1), (R^3, ρ_2), (R^3, ρ_∞).

Úloha 12. Jak vypadá koule v diskrétním metrickém prostoru?

Definice 13. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků X. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* k $y \in X$ v (X, ρ), jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y) = 0$. Prvek y nazýváme *limitou posloupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v (X, ρ). *Konvergentní posloupností v* (X, ρ) rozumíme každou posloupnost prvků X, která má limitu v (X, ρ).

Definice 14. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$. Řekneme, že množina M je *uzavřená* v X, jestliže platí: pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v M, splňující $x_n \to x$ pro nějaký prvek $x \in X$, pak platí: $x \in M$.

Definice 15. Nechť $M \subset X$, $x \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *vnitřním bodem množiny* M, jestliže existuje $r > 0$ splňující $B(x, r) \subset M$.

Množina $M \subset X$ se nazývá *otevřená v* (X, ρ), jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Poznámka 16.

1. Množina F v metrickém prostoru (X, ρ) je uzavřená právě tehdy, když $X \setminus F$ je otevřená.
2. Množina G v metrickém prostoru (X, ρ) je otevřená právě tehdy, když $X \setminus G$ je uzavřená.

Úloha 17. Určete, zda je interval $(0, 1)$ otevřená či uzavřená množin v metrickém prostoru (X, ρ), jestliže

1. $X = (0, 1)$, $\rho = \rho_1$,
2. $X = \mathbb{R}$, $\rho = \rho_1$,
3. $X = [0, 1]$ s diskrétní metrikou,
4. $X = (0, 1) \cup (3, 4)$, $\rho = 3\rho_1$.

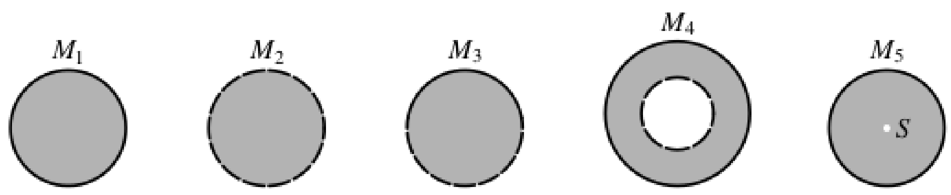
Definice 18. Nechť $M \subset X$. Řekneme, že x je *hraničním bodem množiny* M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů nazýváme *hranice* a značíme ji ∂M.

Uzávěrem množiny M rozumíme množinu $\bar{M} = M \cup \partial M$.

Úloha 19. Určete, zda množina M je uzavřená, otevřená, co je její vnitřek, uzávěr, hranice (v $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou):

1. $M = (0, 1)$
2. $M = [0, 1]$
3. $M = (0, 1]$
4. $M = (0, \infty)$
5. $M = [0, \infty)$
6. $M = (-\infty, \infty)$
7. $\mathbb{N}$
8. $\mathbb{Q}$
9. $\mathbb{R}$

Úloha 20. Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, najděte hranici (v $\mathbb{R}^2$).



Úloha 21. Rozhodněte, zda platí (v obecném metrickém prostoru):

1. $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Úloha 22. Najděte uzávěry grafů funkcí

1.
$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
2. Dirichletova funkce
3. Riemannova funkce

3

Úloha 23. Nechť $0 < p \leq q < \infty$. Sestrojte množinu A tak, aby $\operatorname{diam} A = q$, a $\operatorname{diam} A^\circ = p$.

Úloha 24. Najděte netriviální $A \subset \mathbb{R}$, aby splňovala následující

1. $\overline{A} = \partial A$
2. $\operatorname{Int} \overline{A} \supsetneq A$
3. $\operatorname{Int} \overline{A} \subsetneq A$
4. $\overline{\operatorname{Int} A} \subsetneq A$
5. $\overline{\operatorname{Int} A} \supsetneq A$
6. $\overline{\operatorname{Int} A} = A$

Úloha 25. Je každá konečná podmnožina metrického prostoru nutně uzavřená?

Definice 26. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$, $x \in X$. Řekneme, že x je *hromadným bodem množiny* M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 : M \cap (B(x,r) \setminus \{x\}) \neq 0.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny M značíme M' a nazýváme ji *derivací množiny* M. Body z $M \setminus M'$ nazýváme *izolovanými body množiny* M.

Úloha 27. Co lze říci o otevřených množinách, jejichž každý bod je izolovaný?

Definice 28. Množina $M \subset X$ se nazývá *omezená*, jestliže $\exists K \operatorname{diam}(M) < K$.

Úloha 29. Určete, zda množina M je omezená

1. $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 2\}$
2. $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x| \leq |y|\}$
3. $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x - y| < 2\}$
4. $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2 < xyz < 4\}$

Poznámka 30. Nechť $(X, \rho$ a (Y, σ) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$ je spojité zobrazení. Pak pro otevřenou množinu G v (Y, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (X, ρ) a pro uzavřenou množinu F v (Y, σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (X, ρ).

Úloha 31. Najděte protipříklad na tvrzení:

1. pro otevřenou množinu G v (X, ρ) je $f(G)$ otevřená v (Y, σ) a
2. pro uzavřenou množinu F v (X, ρ) je $f(F)$ uzavřená v (Y, σ).

Úloha 32. Mějme zobrazení $f : (\mathbb{R}, \rho_2) \to (\mathbb{R}, \rho_d)$, kde ρ_d značí diskrétní metriku. Co můžeme říct o f, jestliže víme, že je spojité?