

(1a)

$$u' = 2u - 4v$$

$$v' = u - 3v$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} u & v \end{matrix} \\ \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\Delta E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -1 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ (\lambda - 2)(\lambda + 3) + 4 & -4(\lambda + 3) + 4(\lambda + 3) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ \lambda^2 + \lambda - 2 & 0 \end{pmatrix}$$

re:  $u'' + u' - 2 = 0$

$$u = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1$$

part

$$u' - 2u + 4v = 0$$

$$4v = -(-2c_1 e^{-2x} + c_2 e^x) + 2c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$$

$$v = c_1 e^{-2x} + \frac{1}{4} c_2 e^x$$

$$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$$

$$(15) \quad u' = u - 4v$$

$$v' = 2u - 3v$$

$$1 - 4$$

$$2 - 3$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ -2 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \stackrel{.2}{\sim} \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ 0 & \lambda^2 + 2\lambda + 8 - 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & \lambda + 3 \\ 0 & \lambda^2 + 2\lambda + 8 - 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & \lambda + 3 \\ 0 & \lambda^2 + 2\lambda + 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$\lambda_1 = -1 + 2i$$

$$\lambda_2 = -1 - 2i$$

$$v = c_1 e^{-x} \cos 2x$$

$$+ c_2 e^{-x} \sin 2x$$

$$-2u + v' + 3v = 0$$

$$2u = \underline{c_1 e^{-x} \cos 2x} - 2c_1 e^{-x} \sin 2x$$

$$- c_2 e^{-x} \sin 2x + \underline{2c_2 e^{-x} \cos 2x}$$

$$+ \underline{3c_1 e^{-x} \cos 2x} + \underline{3c_2 e^{-x} \sin 2x}$$

$$2u = (2c_1 + 3c_2) e^{-x} \cos 2x + (2c_2 - 2c_1) e^{-x} \sin 2x$$

$$u = (c_1 + c_2) e^{-x} \cos 2x + (c_2 - c_1) e^{-x} \sin 2x$$

$$(1c) \quad u' = -7u + 9v$$

$$v' = -u - v$$

$$\begin{matrix} -7 & 9 \\ -1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda+7 & -9 \\ 1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda+7)+9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda^2+8\lambda+16 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = -4$$

$$v = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$$

$$u + v' + v = 0$$

$$u = - \left( -4c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-4x} - 4c_2 x e^{-4x} \right) - c_1 e^{-4x} - c_2 x e^{-4x}$$

$$u = \underline{\underline{3c_1 e^{-4x} - c_2 e^{-4x} + 3c_2 x e^{-4x}}}$$

(gd)

$$u' = 2u - 4v$$

$$v' = u - 2v$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$u(0) = 0$$

$$v(0) = -1$$

$\lambda I - A$ :

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda + 2 \\ 0 & (\lambda + 2)(\lambda - 2) + 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda + 2 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$v'' = 0$$

$$\lambda^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 0$$

$$v = c_1 + c_2 x$$

$$-u + v' + 2v = 0$$

$$u = c_2 + 2c_1 + 2c_2 x$$

$$c_{1,2} x \in \mathbb{R}$$

$$u = 2c_2 x + (2c_1 + c_2)$$

$u(0)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= c_2 + 2c_1 \\ -1 &= c_1 \end{aligned}$$

$$c_2 = 2$$

$$u = 4x$$

$$v = -1 + 2x$$

(1e)

$$u' = v$$

$$v' = -u$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \pm i$$

$$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$v = u'$$

$$v = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$(1f) \quad u' = 2u - 3v$$

$$v' = u - 2v$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda + 2 \\ 0 & (\lambda + 2)(\lambda - 2) + 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda + 2 \\ 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$$

$$\lambda = \pm 1$$

$$v = \underline{c_1 e^x + c_2 e^{-x}}$$

$$-u + v' + 2v = 0$$

$$u = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 2c_1 e^x + 2c_2 e^{-x}$$

$$u = \underline{3c_1 e^x + c_2 e^{-x}}$$

## Řešení soustav pomocí úprav $\lambda$ -matice

Tento způsob řešení se od předchozího liší pouze formou zápisu. Díky přehlednějšímu formalismu však umožňuje řešit i větší soustavy. Buď  $\lambda$  operátor derivování, tj.  $\lambda z := z'$ ,  $\lambda^2 z = z''$ ,  $\dots$ . S využitím tohoto označení můžeme namísto operací s rovnicemi provádět operace s řádky matice, ve které se vyskytují polynomy v proměnné  $\lambda$ . Konkrétně se jedná o úpravy:

- záměna pořadí řádků matice,
- vynásobení řádku matice číslem,
- přičtení  $P(\lambda)$ -násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde  $P$  je polynom.

Matici snadno upravíme na trojúhelníkový tvar pomocí Gaussovy eliminace. Navíc můžeme takto upravovat rozšířenou matici o sloupec pravých stran a řešit tak rovnou nehomogenní rovnici.

**Pozor**, není možné vynásobit řádek polynomem v  $\lambda$ , tím by se zvýšil řád soustavy. Také není možné polynomy dělit.

**Příklad 2.** Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{cases} x' = 2x + y - z, \\ y' = 7x + 4y - z, \\ z' = 13x + 7y - 3z. \end{cases}$$

*Řešení.* S využitím zápisu pomocí  $\lambda$  dostáváme

$$\begin{aligned} \lambda x - 2x - y + z &= 0, \\ -7x + \lambda y - 4y + z &= 0, \\ -13x - 7y + \lambda z + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Upravujme tedy matici

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -7 & \lambda - 4 & 1 \\ -13 & -7 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

Od druhého řádku odečteme první řádek a od třetího řádku odečteme  $(\lambda + 3)$  násobek prvního řádku:

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -\lambda - 5 & \lambda - 3 & 0 \\ -(\lambda - 2)(\lambda + 3) - 13 & (\lambda + 3) - 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -\lambda - 5 & \lambda - 3 & 0 \\ -\lambda^2 - \lambda - 7 & \lambda - 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Od druhého řádku odečteme třetí řádek a poté od třetího řádku odečteme  $(\lambda - 4)$ -násobek druhého řádku

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ \lambda^2 + 2 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 - \lambda - 7 & \lambda - 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ \lambda^2 + 2 & 1 & 0 \\ -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V posledním řádku máme nyní rovnici  $-x''' + 3x'' - 3x' + x = 0$ , v matici je tedy rovnou charakteristický polynom této rovnice. Dostáváme tedy řešení

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t, \quad t \in \mathbb{R}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Z druhého řádku matice dopočítáme  $y$ :

$$y(t) = -x'' - 2x = -e^t(3c_1 + 2c_2 + 2c_3 + t(3c_2 + 4c_3) + t^2 \cdot 3c_3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Z první rovnice dopočítáme  $z$ :

$$z(t) = e^t(-2c_1 - 3c_2 - 2c_3 + t(-2c_2 - 6c_3) + t^2 \cdot (-2c_3)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Příklad 3.** Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2y'' + 3z'' - 7y - 6z &= t + 1 \\ 4y'' + 3z'' - 4y - 3z &= 2t. \end{aligned}$$

*Řešení.* Napíšeme si  $\lambda$ -matici s pravou stranou:

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{cc|c} 2\lambda^2 - 7 & 3\lambda^2 - 6 & t + 1 \\ 4\lambda^2 - 4 & 3\lambda^2 - 3 & 2t \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 2\lambda^2 - 7 & 3\lambda^2 - 6 & t + 1 \\ 2\lambda^2 + 3 & 3 & t - 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2\lambda^2 - 7 - (\lambda^2 - 2)(2\lambda^2 + 3) & 0 & 0 & t + 1 - (t - 1)'' + 2(t - 1) \\ & 2\lambda^2 + 3 & 3 & t - 1 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{ccc|c} -2\lambda^4 + 3\lambda^2 - 1 & 0 & 0 & 3t - 1 \\ & 2\lambda^2 + 3 & 3 & t - 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Řešení charakteristického polynomu v prvním řádku jsou  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{2}/2$ . Tedy řešení homogenní rovnice

$$-2y^{(4)} + 3y'' - y = 0$$

jsou

$$ae^t + be^{-t} + ce^{\sqrt{2}/2t} + de^{-\sqrt{2}/2t}.$$



$$(2a) \quad y' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} y$$

$$- \left( \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 2 & 4 \\ -4 & \lambda + 2 & 3 \\ -2 & 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \right) \begin{matrix} \cdot (\lambda + 2) \\ \cdot (-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 2 & 4 \\ (\lambda + 2)(\lambda - 4) + 8 & 0 & 4\lambda + 2 \\ \lambda - 2 & 0 & -\lambda + 2 \end{pmatrix} \sim$$

(für Eigenwerte)

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 2 & 4 \\ \lambda(\lambda - 2) & 0 & 2(2\lambda + 1) \\ \lambda - 2 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot (\lambda + 2) \\ \cdot (-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 2 & 4 \\ \lambda(\lambda - 2) & 0 & 2(2\lambda + 1) \\ 0 & 0 & -\lambda(2 - \lambda) + 2(2\lambda + 1) \end{pmatrix}$$

$$y_3: \quad -2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda + 2$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = -1 \pm i$$

$$y_3 = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x$$

$$y_1: \quad y_1' - 2y_1 = -2y_3 + y_3'$$

$$y_1' - 2y_1 = e^{-x} ((-3c_1 + c_2) \cos x + (-c_1 - 3c_2) \sin x)$$

$$\lambda - 2 = 0 \quad y_{1H} = c_3 e^{2x}$$

$$\lambda = 2$$

↓  
spec PS

-1 + 1i neu! lösen

$$y_{1P} = e^{-x} (A \cos x + B \sin x)$$

$$\text{paß} \quad e^{-x} ((-3A + B) \cos x + (-A - 3B) \sin x) = e^{-x} ((-3c_1 + c_2) \cos x + (-c_1 - 3c_2) \sin x)$$

$$\text{gleich} \quad A = c_1, \quad B = c_2$$

$$\text{paß} \quad y_1 = c_3 e^{2x} + c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x$$

$$\text{neu lösen} \quad y_2 = \frac{1}{2} (2y_1 - y_1' - 2y_3)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} e^{-x} ((c_1 + c_2) \sin x + (c_1 - c_2) \cos x + 2c_3 e^{2x})$$

$$(2b) \quad y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda-1 & -2 \\ -3 & -1 & \lambda-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ -\lambda-2 & (\lambda-1)(\lambda-4)-2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ -\lambda-2 & \lambda^2-5\lambda+2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ -4 & \lambda^2-4\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 4 \\ \cdot (\lambda-2) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & (\lambda^2-4\lambda)(\lambda-2) + 4(\lambda-2) & 0 \end{pmatrix}$$

$$y_2: \quad \begin{aligned} \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 4\lambda - 8 &= 0 \\ \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 &= 0 \\ (\lambda-2)^3 &= 0 \\ \text{3-mal's } \lambda &= 2 \end{aligned}$$

$$y_2 = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}$$

$$y_1: \quad \begin{aligned} 4y_1 &= y_2' - 4y_2 \\ 4y_1 &= -2e^{2x}(2c_1 + 2c_2x + c_3(2x^2-1)) \\ y_1 &= -e^{2x}(c_1 + c_2 + c_3(x^2 - \frac{1}{2})) \end{aligned}$$

$$y_3: \quad \begin{aligned} -2y_3 &= y_1' - y_1 - y_2 \\ y_3 &= e^{2x}(c_1 + \frac{c_2}{x}x + \frac{c_2}{2} + c_3x^2 + c_3x - \frac{c_3}{2}) \end{aligned}$$

(2c)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ (\lambda-1)^2+1 & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$  2-wa's

$$\underline{y_1 = c_1 e^x + c_2 x e^x}$$

part

$$y_2' - y_2 = -c_1 e^x - c_2 x e^x$$

$$e^{-x} y_2' - e^{-x} y_2 = -c_1 - c_2 x$$

$$(e^{-x} y_2)' = -c_1 - c_2 x$$

$$\underline{y_2 = e^x \left( -c_1 x - \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 \right)}$$

$$y_3 = -y_2 - y_1' + y_1$$

$$y_3 = \frac{1}{2} e^x \left( \underline{2c_1 x - 2c_2 - 2c_3 + c_2 x^2} \right)$$

(201)

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 3 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} /(\lambda-1) \\ +/-3 \\ * \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} (\lambda-3)(\lambda+1)+3 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda-2) \rightarrow$$

$$y_1 = c_1 + c_2 e^{2x}$$

$$\begin{matrix} (1) \cdot (\lambda-1) \\ + (2) \cdot (-3) \end{matrix} \begin{pmatrix} (\lambda-3)(\lambda-1)+3 & 3(\lambda-1) - 3(\lambda+1) & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - 4\lambda + 6 & -6 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$+ 6y_2 = y_3'' - 4y_3' + 6y_3$$

$$6y_2 = 6c_1 + 2c_2 e^{2x}$$

$$y_2 = c_1 + \frac{1}{3}c_2 e^{2x}$$

наточнее

$$y_3' - y_3 = 2y_1 - 2y_2$$

$$y_3' - y_3 = 2c_1 + 2c_2 e^{2x} - 2c_1 - \frac{2}{3}c_2 e^{2x}$$

$$y_3' - y_3 = \frac{4}{3}c_2 e^{2x}$$

Integrir:

$$e^{-x} y_3' - y_3 e^{-x} = \frac{4}{3}c_2 e^x$$

$$(e^{-x} y_3)' = \frac{4}{3}c_2 e^x$$

$$y_3 = e^x \left[ \frac{4}{3}c_2 e^x + c_3 \right]$$

(2e)

$$y' = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -4 \\ 4 & -5 & 1 \\ 10 & -10 & -5 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 9 & 10 & 4 \\ -4 & \lambda + 5 & -1 \\ -10 & 10 & \lambda + 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda - 9 & 10 & 4 \\ \lambda + 1 & 0 & -\lambda - 1 \\ 40 - 10\lambda - 50 & 0 & 10 + (\lambda + 5)^2 \end{pmatrix}$$

(·(-10))  
- ) +  
(·(\lambda + 5))

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 9 & 10 & 4 \\ \lambda + 1 & 0 & -(\lambda + 1) \\ -10(\lambda + 1) & 0 & \lambda^2 + 10\lambda + 35 \end{pmatrix} \cdot 10 \sim \begin{pmatrix} \lambda - 9 & 10 & 4 \\ \lambda + 1 & 0 & -(\lambda + 1) \\ 0 & 0 & \lambda^2 + 10\lambda + 35 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\lambda^2 + 10\lambda + 35}_{\lambda^2 - 25}$

$$\lambda^2 + 25 = 0$$

$$\lambda = \pm 5i$$

$$y_3 = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$$

$$y_1' + y_1 = y_3' + y_3$$

$$y_1' + y_1 = (\cos 5x)(c_1 + 5c_2) + (c_2 - 5c_1) \sin 5x$$

$$(y_1 e^x)' = e^x [\cos 5x (c_1 + 5c_2) + (c_2 - 5c_1) \sin 5x] \quad \leftarrow \text{primale PC}$$

$$y_1 = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + c_3 e^{-x}$$

$$10y_2 = -4y_3 + 9y_1 - y_1'$$

$$y_2 = \frac{1}{2} (c_1 + c_2) \sin 5x + \frac{1}{2} (c_1 - c_2) \cos 5x + c_3 e^{-x}$$