Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 4

LS 2020-21, vzor

1. Uvažujte funkce definované předpisem

$$f_n(x) = \sqrt[2n]{x^n + |\log x|}, \qquad x \in (0, \infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pro každé $x \in (0, \infty)$.

(b) Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na intervalu $(0, 1]$.

(c) Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na intervalu $[1, \infty)$.

(20 bodů)

2. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$$

na největším možném intervalu. (20 bodů)

3. Nalezněte reálná čísla $b_n, n \in \mathbb{N}$, taková, aby platilo

$$e^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

pro každé $x \in (0, \pi)$. Svá tvrzení zdůvodněte. (20 bodů)