12. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1

Definice 1. Metrický prostor se nazývá *separabilní*, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina.

Úloha 2. 1. Ukažte, že $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou separabilní.

Řešení: $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ na skenu.

10.7. Separabilní prostory

10.7.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **separabilní**, jestliže obsahuje spočetnou hustou podmnožinu.

10.7.2. Příklady. (a) Dokažte, že prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, jsou separabilní.

(b) Dokažte, že metrický prostor $(C([0,1]), \varrho_{\sup})$ je separabilní.

(c) Dokažte, že diskrétní metrický prostor je separabilní právě tehdy, když je spočetný.

2.1

Řešení. (a) Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná a hustá v $\mathbb{R}$ a množina

$$\{z \in \mathbb{C};\ z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{Q}\}$$

je spočetná a hustá v $\mathbb{C}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ je množina bodů z $\mathbb{R}^n$ s racionálními souřadnicemi spočetná a hustá v $\mathbb{R}^n$ a množina těch bodů z $\mathbb{C}^n$, jejichž všechny reálné i imaginární souřadnice jsou racionální, je spočetná a hustá v $\mathbb{C}^n$.

(b) Nechť $f \in C([0,1])$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Weierstrassovy věty (Věta 12.2.6) pak existuje polynom P splňující

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Nechť $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a pro každé $x \in [0,1]$. Nalezneme racionální čísla $b_0, \dots, b_n$ splňující

$$\sum_{j=0}^n |a_j - b_j| < \varepsilon.$$

Označme $\tilde{P}(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ Potom

$$\begin{aligned} \|P - \tilde{P}\|_{\sup} &= \sup_{x\in[0,1]} |P(x) - \tilde{P}(x)| \le \sup_{x\in[0,1]} \sum_{j=0}^n |a_j - b_j| x^j \\ &\le \sum_{j=0}^n |a_j - b_j| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy

$$\|f - \tilde{P}\|_{\sup} \le \|f - P\|_{\sup} + \|P - \tilde{P}\|_{\sup} < 2\varepsilon.$$

Dokázali jsme tudíž, že množina všech polynomů definovaných na $[0,1]$, jejichž všechny koeficienty jsou racionální čísla, je hustá v metrickém prostoru $(C([0,1]), \varrho_{\sup})$. Protože tato množina je zřejmě spočetná, je tento prostor separabilní.

(c) Nechť P je množina a ϱ je diskrétní metrika na P. Podle Příkladu 10.6.25 je jedinou hustou podmnožinou prostoru (P, ϱ) množina P. Odtud ihned plyne tvrzení. ♣

10.7.3. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Jestliže existuje nespočetná množina $A \subset P$ a $\varepsilon > 0$ taková, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x, y) \ge \varepsilon$, pak P není separabilní.

Prostor $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je separabilní. Uvažujme množinu $M := \{q + \pi, q \in \mathbb{Q}\}$. Pak $M \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je spočetná.

Hustota: Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a uvažujme číslo $x - \pi$. Protože $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, tak existuje $p \in \mathbb{Q}$ takové, že $|x - \pi - p| < \varepsilon$. Pak ale $|x - (p + \pi)| < \varepsilon$. Tedy k x jsme našli blízké číslo $p + \pi \in M$, což bylo dokázati.

2. Ukažte, že $(C([0,1]), \rho_{\text{sup}})$ je separabilní.

   Řešení: Sken.

10.7. Separabilní prostory

10.7.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **separabilní**, jestliže obsahuje spočetnou hustou podmnožinu.

10.7.2. Příklady. (a) Dokažte, že prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, jsou separabilní.

(b) Dokažte, že metrický prostor $(C([0,1]), \varrho_{\sup})$ je separabilní.

(c) Dokažte, že diskrétní metrický prostor je separabilní právě tehdy, když je spočetný.

Řešení. (a) Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná a hustá v $\mathbb{R}$ a množina

$$\{z \in \mathbb{C};\ z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{Q}\}$$

je spočetná a hustá v $\mathbb{C}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ je množina bodů z $\mathbb{R}^n$ s racionálními souřadnicemi spočetná a hustá v $\mathbb{R}^n$ a množina těch bodů z $\mathbb{C}^n$, jejichž všechny reálné i imaginární souřadnice jsou racionální, je spočetná a hustá v $\mathbb{C}^n$.

2.2

(b) Nechť $f \in C([0,1])$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Weierstrassovy věty (Věta 12.2.6) pak existuje polynom P splňující

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Nechť $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a pro každé $x \in [0,1]$. Nalezneme racionální čísla $b_0, \dots, b_n$ splňující

$$\sum_{j=0}^{n} |a_j - b_j| < \varepsilon.$$

Označme $\tilde{P}(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ Potom

$$\begin{aligned}\|P - \tilde{P}\|_{\sup} &= \sup_{x \in [0,1]} |P(x) - \tilde{P}(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} \sum_{j=0}^{n} |a_j - b_j| x^j \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} |a_j - b_j| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy

$$\|f - \tilde{P}\|_{\sup} \leq \|f - P\|_{\sup} + \|P - \tilde{P}\|_{\sup} < 2\varepsilon.$$

Dokázali jsme tudíž, že množina všech polynomů definovaných na $[0,1]$, jejichž všechny koeficienty jsou racionální čísla, je hustá v metrickém prostoru $(C([0,1]), \varrho_{\sup})$. Protože tato množina je zřejmě spočetná, je tento prostor separabilní.

(c) Nechť P je množina a ϱ je diskrétní metrika na P. Podle Příkladu 10.6.25 je jedinou hustou podmnožinou prostoru (P, ϱ) množina P. Odtud ihned plyne tvrzení. ♣

10.7.3. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Jestliže existuje nespočetná množina $A \subset P$ a $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x, y) \geq \varepsilon$, pak P není separabilní.

3. Za jakých podmínek je separabilní diskrétní metrický prostor?

   Řešení: Konvergentní množina v diskrétním prostoru musí být od jistého bodu konstantní. Z toho plyne, že jediná hustá množina v diskrétním prostoru je celé X. A aby X byl separabilní, musí být X spočetná.

4. Ukažte, že $L^1([0,1])$ je separabilní.

   Řešení: Nechť M je množina takových jednoduchých funkcí, které mají hodnoty v $\mathbb{Q}$ a zároveň jsou definované pomocí intervalů s racionálními koncovými body. Pak M je hustá a spočetná.

Věta 3. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Jestliže existuje nespočetná množina $A \subset X$ a $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\rho(x, y) \geq \varepsilon$, pak X není separabilní.

Poznámka 4. Nechť $p \in [1, \infty)$ a l_p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x - y|^p \right)^{1/p}.$$

Poznámka 5. Označme l_∞ prostor všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ a c_0 prostor všech (omezených) reálných posloupností $\{x_n\}$ s $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Oba jsou s metrikou

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 6. Ukažte, že

1. l^∞ není separabilní.
2. c_0 je separabilní.

Řešení: Sken.

máme $x_n \in G$, a tedy $G \cap D \neq \emptyset$. Podle Věty 10.6.28 je tudíž množina D hustá v P. Odtud plyne, že prostor P je separabilní. ■

10.7.7. Důsledek. Nechť (P, ϱ) je separabilní metrický prostor a $Q \subset P$. Potom je metrický prostor (Q, ϱ) separabilní.

Důkaz. Podle Věty 10.7.6 existuje spočetná báze $\mathcal{B}$ otevřených množin prostoru P. Definujme systém $\mathcal{B}_Q = \{Q \cap B;\ B \in \mathcal{B}\}$. Dokážeme, že $\mathcal{B}_Q$ je bází otevřených množin prostoru Q.

Systém $\mathcal{B}_Q$ zřejmě spočetný a každý jeho prvek je otevřená množina v Q podle Věty 10.3.44. Předpokládejme, že $G \subset Q$ je otevřená množina v Q. Podle Věty 10.3.44 existuje množina $\tilde{G} \subset P$ otevřená v P splňující $G = \tilde{G} \cap Q$. Pro množinu $\tilde{G}$ nalezneme systém $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ splňující $\tilde{G} = \bigcup \mathcal{B}^*$. Položme $\mathcal{B}_Q^* = \{Q \cap B;\ B \in \mathcal{B}^*\}$. Potom zřejmě $\mathcal{B}_Q^* \subset \mathcal{B}_Q$ a $\bigcup \mathcal{B}_Q^* = Q \cap \bigcup \mathcal{B}^* = Q \cap \tilde{G} = G$.

Prostor (Q, ϱ) je separabilní podle Věty 10.7.6, neboť má spočetnou bázi otevřených množin. ■

10.7.8. Definice. Nechť X je množina a $A \subset X$. **Charakteristickou funkcí** množiny A nazýváme funkci $\chi_A \colon X \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in A \\ 0 & \text{pokud } x \notin A. \end{cases}$$

Speciálně pro $X = \mathbb{N}$ a $A \subset \mathbb{N}$ definujeme **charakteristickou posloupnost** $\{\chi_A\}_{n=1}^{\infty}$ množiny A předpisem

$$(\chi_A)_n = \begin{cases} 1 & \text{pokud } n \in A \\ 0 & \text{pokud } n \notin A. \end{cases}$$

10.7.9. Věta. (a) Prostor ℓ^∞ není separabilní.

(b) Prostor c_0 je separabilní.

6

Důkaz. (a) Nechť $A, B \subset \mathbb{N}$, $A \neq B$. Potom zřejmě platí

$$\|\chi_A - \chi_B\|_{\ell^\infty} = 1,$$

neboť posloupností χ_A a χ_B obsahují pouze nuly a jedničky a nejsou stejné. Z Věty 10.7.3 tedy vyplývá, že prostor ℓ^∞ není separabilní.

(b) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$D_n = \{x \in c_0;\ x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty},\ x_j \in \mathbb{Q},\ \ x_j = 0 \text{ pro } j > n\}$$

a

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Potom D_n je spočetná pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy je také D spočetná. Dokážeme, že D je hustá v c_0.

Nechť $y = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ je prvek z c_0, tedy y je posloupnost reálných čísel splňující $\lim_{j\to\infty} y_j = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|y_j| < \varepsilon$ pro každé $j > n$. Dále pro každé $j \in \{1, \dots, n_0\}$ nalezneme $r_j \in \mathbb{Q}$ splňující $|r_j - y_j| < \varepsilon$. Posloupnost $x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, definovaná předpisem

$$x_j = \begin{cases} r_j & \text{pokud } j = 1, \dots, n_0, \\ 0 & \text{pokud } j > n_0, \end{cases}$$

6 potom splňuje $x \in D_{n_0}$, tedy $x \in D$, a

$$\begin{aligned} \|x - y\|_{\ell^\infty} &= \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - y_j| = \max\{\sup_{j \in \mathbb{N},\, j \le n_0} |x_j - y_j|, \sup_{j \in \mathbb{N}\, j > n_0} |0 - y_j|\} \\ &< \max\{\varepsilon, \varepsilon\} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Množina D je tedy hustá v c_0. Odtud vyplývá, že prostor c_0 je separabilní. ■

10.7.10. Věta (vztah totální omezenosti a separability)**.** Nechť (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P separabilní.

Důkaz. Podle definice totální omezenosti existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ konečná $\frac{1}{n}$-síť D_n prostoru P. Položme $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Podle Věty 1.6.19(b) je potom množina D spočetná. Zvolme $x \in P$ a $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Poněvadž D_n je $\frac{1}{n}$-síť, existuje $y \in D_n$ takové, že $\varrho(x, y) < \frac{1}{n}$. Potom $y \in D$ a platí $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Odtud plyne, že D je hustá v P. Prostor P je tedy separabilní. ■

10.7.11. Důsledek. Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P separabilní.

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 10.5.28 a Věty 10.7.10. ■

10.7.12. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) má **Lindelöfovu vlastnost**[2], jestliže pro každý systém $\mathcal{G}$ otevřených podmnožin P splňující $P = \bigcup \mathcal{G}$ existuje spočetný systém $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ takový, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$.

10.7.13. Z Věty 10.5.30 plyne, že každý kompaktní metrický prostor má Lindelöfovu vlastnost.

10.7.14. Věta. Nechť (P, ϱ) je separabilní metrický prostor. Potom P má Lindelöfovu vlastnost.

Důkaz. Nechť $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí P. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mathcal{G}$ je neprázdný. Zvolme $G_0 \in \mathcal{G}$. Nechť $D = \{d_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná hustá podmnožina P. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. Jestliže existuje $G \in \mathcal{G}$ splňující $B(d_n, q) \subset G$, potom zvolme jednu z množin G s touto vlastností a označme ji $G_{n,q}$. Jestliže taková množina neexistuje, položme $G_{n,q} = G_0$. Definujme systém $\mathcal{G}^*$ předpisem

$$\mathcal{G}^* = \{G_{n,q};\ n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Q}\}.$$

Potom je $\mathcal{G}^*$ zřejmě spočetný a platí $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$. Dokážeme, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$.

Nechť $x \in P$. Protože $P = \bigcup \mathcal{G}$, nalezneme otevřenou množinu G_x splňující $x \in G_x$ a $G_x \in \mathcal{G}$. Díky otevřenosti množiny G_x nalezneme $r > 0$ takové, že

[2]Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946)

Úloha 7. Rozhodněte, zda pampeliškový prostor je separabilní. $X = \mathbb{R}^2$, pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ máme

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & A,\ B \text{ leží na stejném poloměru,} \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení: Uvažujme spočetnou hustou množinu M.

Pro každý bod x (krom počátku) musí blízký bod m z M ležet na polopřímce spojující x s počátkem (jinak bychom šli přes střed, což by dalo obrovskou vzdálenost). Tedy se ptáme, jestli každá polopřímka obsahuje dostatek bodů z M.

Předpokládejme, že na každé polopřímce leží alespoň jeden bod z M (zároveň nemůže ležet na více přímkách najednou). Polopřímek je ale nespočetně - každá odpovídá jednomu úhlu z intervalu $[0, 2\pi)$, což je nespočetná množina.

Tedy jsme ve sporu a pampeliškový prostor není separabilní.

Úloha 8. Označme L_0 prostor všech lipschitzovských funkcí z $[0, 1]$ do $\mathbb{R}$ takových, že $f(0) = 0$. Zaveďme metriku

$$\rho(f, g) = \sup \left\{ \frac{|(f-g)(x) - (f-g)(y)|}{|x-y|}; x \neq y \right\}$$

- jde o lipschitzovskou konstantu funkce $f - g$.

Ukažte, že prostor L_0 není separabilní.

(Zdroj: `http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/29-mtr/lekce29-mtr-pmax.pdf`)

Řešení: Uvažujme M - množinu funkcí které se rovnají 0 na $[0, r]$ a pak se rovnají $x - r$ pro různá $r \in [0, 1]$. Tato množina je nespočetná.

Zvolme $f, g \in M$ s příslušnými $r_f < r_g$.

Obrázek: `https://www.geogebra.org/calculator/w45zzxfk`

Lipschitzovská konstanta $f - g$ je 1. Tedy jsme našli nespočetnou množinu z Věty 3 a množina je určitě neseparabilní.

2

Definice 9. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $\varepsilon > 0$. Řekneme, že $M \subset X$ je *ε-síť v X*, jesltiže pro každý bod $x \in X$ existuje bod $y \in M$ takový, že $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Definice 10. Metrický prostor (X, ρ) se nazývá *totálně omezený*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť.

Poznámka 11.

- Někdy se říká i *prekompaktní.*
- Definici lze potkat i takto: Z každého ε-pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Úloha 12. Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor omezený? Za jakých je totálně omezený?

Řešení: Jelikož koule v diskrétním metrickém prostoru jsou buď jeden bod nebo celý prostor, je diskrétní metrický prostor vždy omezený.

Z téhož důvodu je totálně omezený právě tehdy, když má konečný počet prvků.

Poznámka 13. Nechť $p \in [1, \infty)$ a l_p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x - y|^p \right)^{1/p}.$$

Úloha 14. Uvažujte prostor l^2. Jeho jednotková sféra je omezená množina. Ukažte, že není totálně omezená.

Řešení: Uvažujme M množinu posloupností a_n, které mají na n-tém místě 1, jinde 0.

Pak $\rho(a_n, b_n) = \sqrt{2}$.

Zvolme tedy $\varepsilon = 1/8$ a ε-síť S. Pak ale S nemůže být konečná, protože potřebuje nekonečně mnoho bodů (a ε-koulí) aby pokryla M.

Úloha 15 (PRAVDA – NEPRAVDA)**.**

ANO Totálně omezená množina je omezená.

NE Omezená množina je totálně omezená.

Úloha 16. Ukažte, že uzávěr totálně omezeného prostoru je totálně omezený.

Řešení: Nechť A je totálně omezený. Pak lze najít konečnou $\varepsilon/2$-síť

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

takovou, že

$$A \subseteq \bigcup_{i=1,\dots,n} B(x_i, \varepsilon/2).$$

Pak $\bar{A} \subseteq \bigcup_{i=1,\dots,n} B(x_i, \varepsilon)$.

Zvolme $x \in \bar{A}$. Pak každá koule se středem v x protíná A. Speciálně tedy existuje $y \in B(x, \varepsilon/2) \cap A$.

Zároveň toto $y \in B(x_i, \varepsilon/2$ pro nějaké i. Ale pak

$$\rho(x, x_i) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x_i) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Hotovo.

Úloha 17. Najděte příklad metrického prostoru, který je totálně omezený, ale není kompaktní.

Řešení: Např. interval $(2, 4)$ - není uzavřený.

3

Definice 18. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *souvislý*, jestliže není sjednocením dvou neprázdných disjunktních otevřených množin.

Věta 19 (Charakterizace souvislých prostorů)**.** Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

1. Prostor X není souvislý.
2. Existují dvě neprázdné disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset X$ uzavřené v (X, ρ) a takové, že $X = F_1 \cup F_2$.
3. Existuje obojetná neprázdná množina H splňující $H \neq X$.
4. Existuje spojité surjektivní zobrazení $f : (X, \rho) \to (\{0, 1\}, \rho_{diskr})$.

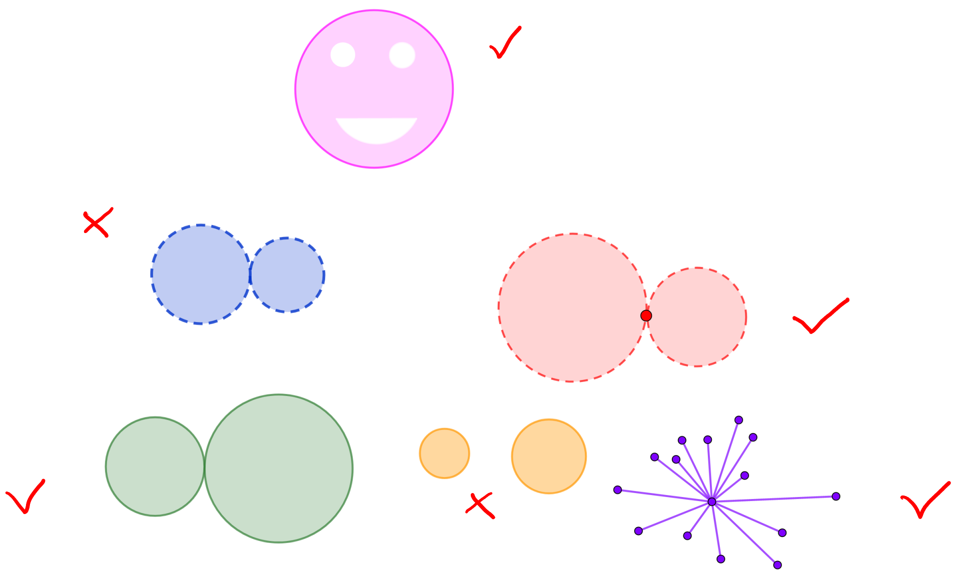
Poznámka 20 (Jiná definice)**.** Prostor (X, ρ) je nesouvislý, jestliže existují disjunktní neprázdné množiny $A, B \subseteq X$ takové, že $X = A \cup B$ a $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Definice 21. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $J \subset X$. Řekneme, že J je *křivka* v prostoru (X, ρ), jestliže existuje spojité zobrazení $f : [0, 1] \to (X, \rho)$ takové, že $f([0, 1]) = J$.

Řekneme, že množina $A \subset X$ je *křivkově souvislá* v prostoru (X, ρ), jestliže pro každé $a, b \in A$ existuje spojité zobrazení $f : [0, 1] \to (A, \rho)$ takové, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$.

Věta 22 (O vztahu souvislosti a křivkové souvislosti)**.** Každá křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je v tomto prostoru souvislá.

Úloha 23. Které množiny (jsme v $\mathbb{R}^2$) jsou souvislé?



Úloha 24 (PRAVDA – NEPRAVDA)**.**

NE Nechť A není souvislý. Pak $\bar{A}$ není souvislý. Např. $(0,1) \cup (1,2)$.

ANO Nechť A je souvislý. Pak $\bar{A}$ je souvislý.

NE Nechť A je souvislý. Pak $\operatorname{int} A$ je souvislý. Např. dva dotýkající se uzavřené kruhy.

ANO Nechť $\bar{A}$ není souvislý. Pak A není souvislý.

Úloha 25 (PRAVDA – NEPRAVDA)**.**

NE Nechť A není souvislý. Pak A^c není souvislý. Např. doplněk dvou disjunktních kruhů.

NE Nechť A je souvislý. Pak A^c není souvislý. Např. doplněk kruhu.

NE Nechť A je souvislý. Pak A^c je souvislý. Např. A je nekonečný jednotkový pruh podél osy x.

NE Nechť A a B jsou souvislé. Pak $A \cup B$ je souvislá. Např. dva disjunktní kruhy.

NE Nechť A a B jsou souvislé. Pak $A \cap B$ je souvislá. Např. když se protnou na koncích dvě fazole.

Úloha 26. Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor souvislý?
Řešení: Právě tehdy, když má jen jeden prvek

Úloha 27. Ukažte, že prostor $X = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ je křivkově souvislý.
Řešení: Zvolme dva body $x, y \in X$. Vytvořme úsečku s krajními body x, y a její osu O.

Pak lze najít takový bod $b \in O$, že úsečky xb a xy neprotínají $\mathbb{Q}^2$. Zároveň je tato dvojice úseček hledaná spojnice bodů x a y.

Pokud by každá dvojice protínala množinu $\mathbb{Q}^2$, znamenalo by to, že dvojic úseček je jen spočetně, což je spor.