12. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1

Definice 1. Metrický prostor se nazývá *separabilní*, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina.

Úloha 2.
1. Ukažte, že $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou separabilní.
2. ♡ Ukažte, že $(C([0,1]), \rho_{\sup})$ je separabilní.
3. ♡ Za jakých podmínek je separabilní diskrétní metrický prostor?
4. ♡ Ukažte, že $L^1([0,1])$ je separabilní.

Věta 3. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Jestliže existuje nespočetná množina $A \subset X$ a $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\rho(x,y) \geq \varepsilon$, pak X není separabilní.

Poznámka 4. Nechť $p \in [1, \infty)$ a l_p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x-y|^p \right)^{1/p}.$$

Poznámka 5. Označme l_∞ prostor všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ a c_0 prostor všech (omezených) reálných posloupností $\{x_n\}$ s $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Oba jsou s metrikou

$$\rho_\infty(x,y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 6 (♡)**.** Ukažte, že

1. l^∞ není separabilní.
2. c_0 je separabilní.

Úloha 7 (♡)**.** Rozhodněte, zda pampeliškový prostor je separabilní. $X = \mathbb{R}^2$, pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ máme

$$\rho(A,B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}, & A,\ B \text{ leží na stejném poloměru}, \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{jinak}. \end{cases}$$

Úloha 8. Označme L_0 prostor všech lipschitzovských funkcí z $[0,1]$ do $\mathbb{R}$ takových, že $f(0) = 0$. Zaveďme metriku

$$\rho(f,g) = \sup \left\{ \frac{|(f-g)(x) - (f-g)(y)|}{|x-y|}; x \neq y \right\}$$

- jde o lipschitzovskou konstantu funkce $f - g$.

Ukažte, že prostor L_0 není separabilní.

Návod: Najděte vzdálenost funkcí, které se rovnají 0 na $[0, r]$ *a pak se rovnají* $x - r$ *pro různá* $r \in [0, 1]$.

Obrázek k návodu: https://www.geogebra.org/calculator/w45zzxfk

---

2

Definice 9. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $\varepsilon > 0$. Řekneme, že $M \subset X$ je *ε-síť v X*, jesltiže pro každý bod $x \in X$ existuje bod $y \in M$ takový, že $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Definice 10. Metrický prostor (X, ρ) se nazývá *totálně omezený*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť.

Poznámka 11.

- Někdy se říká i *prekompaktní.*
- Definici lze potkat i takto: Z každého ε-pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Úloha 12. Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor omezený? Za jakých je totálně omezený?

Poznámka 13. Nechť $p \in [1, \infty)$ a l_p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x - y|^p \right)^{1/p}.$$

Úloha 14 ($\heartsuit$)**.** Uvažujte prostor l^2. Jeho jednotková sféra je omezená množina. Ukažte, že není totálně omezená.

Úloha 15 (PRAVDA – NEPRAVDA)**.**

ANO–NE Totálně omezená množina je omezená.

ANO–NE Omezená množina je totálně omezená.

Úloha 16 ($\heartsuit$)**.** Ukažte, že uzávěr totálně omezeného prostoru je totálně omezený.

Úloha 17. Najděte příklad metrického prostoru, který je totálně omezený, ale není kompaktní.

3

Definice 18. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *souvislý*, jestliže není sjednocením dvou neprázdných disjunktních otevřených množin.

Věta 19 (Charakterizace souvislých prostorů)**.** Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

1. Prostor X není souvislý.
2. Existují dvě neprázdné disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset X$ uzavřené v (X, ρ) a takové, že $X = F_1 \cup F_2$.
3. Existuje obojetná neprázdná množina H splňující $H \neq X$.
4. Existuje spojité surjektivní zobrazení $f : (X, \rho) \to (\{0, 1\}, \rho_{diskr})$.

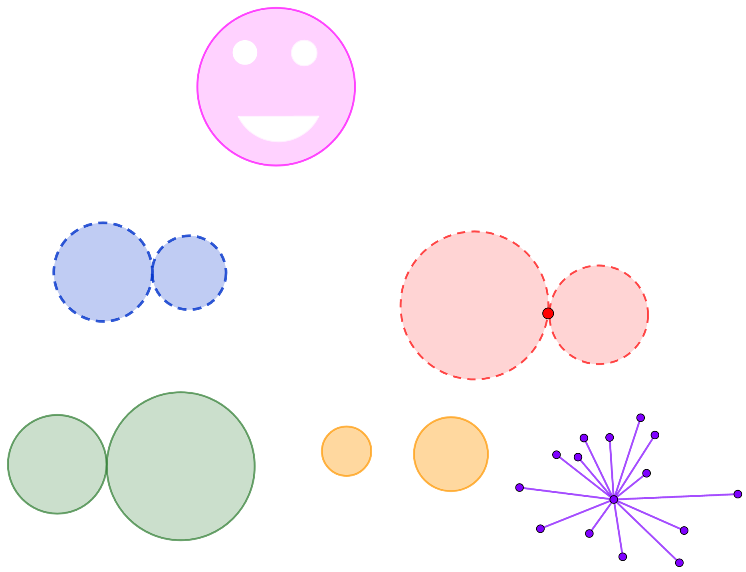
Poznámka 20 (Jiná definice)**.** Prostor (X, ρ) je nesouvislý, jestliže existují disjunktní neprázdné množiny $A, B \subseteq X$ takové, že $X = A \cup B$ a $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Definice 21. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $J \subset X$. Řekneme, že J je *křivka* v prostoru (X, ρ), jestliže existuje spojité zobrazení $f : [0, 1] \to (X, \rho)$ takové, že $f([0, 1]) = J$.

Řekneme, že množina $A \subset X$ je *křivkově souvislá* v prostoru (X, ρ), jestliže pro každé $a, b \in A$ existuje spojité zobrazení $f : [0, 1] \to (A, \rho)$ takové, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$.

Věta 22 (O vztahu souvislosti a křivkové souvislosti)**.** Každá křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je v tomto prostoru souvislá.

Úloha 23. Které množiny (jsme v $\mathbb{R}^2$) jsou souvislé?



Úloha 24 (PRAVDA – NEPRAVDA)**.**

ANO–NE Nechť A není souvislý. Pak $\bar{A}$ není souvislý.

ANO–NE Nechť A je souvislý. Pak $\bar{A}$ je souvislý.

ANO–NE Nechť A je souvislý. Pak $\operatorname{int} A$ je souvislý.

ANO–NE Nechť $\bar{A}$ není souvislý. Pak A není souvislý.

Úloha 25 (PRAVDA – NEPRAVDA)**.**

ANO–NE Nechť A není souvislý. Pak A^c není souvislý.

ANO–NE Nechť A je souvislý. Pak A^c není souvislý.

ANO–NE Nechť A je souvislý. Pak A^c je souvislý.

ANO–NE Nechť A a B jsou souvislé. Pak $A \cup B$ je souvislá.

ANO–NE Nechť A a B jsou souvislé. Pak $A \cap B$ je souvislá.

Úloha 26. Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor souvislý?

Úloha 27 (♡)**.** Ukažte, že prostor $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ je křivkově souvislý.

(2.2) polynomy s $\mathbb{Q}$ koeficienty
(2.3) jak vypadá konvergence v diskr. prostoru?
(2.4) co některé jednoduché funkce?
(6.1) posloupnosti typu χ_A, $A \subset \mathbb{N}$
(6.2) posloupnosti s $\mathbb{Q}$ členy
(7) kolik je polopřímek, které procházejí počátkem?
(14) posloupnosti, které mají na n-tém místě 1, jinde 0.
(16) Začněte s $\varepsilon/2$ sítí. Když ji nafouknete na ε-síť, co se stane?
(27) Hledejte spojnice bodů x a y, které jdou přes osu úsečky xy.