11. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Řekneme, že řada komplexních čísel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je *sčítatelná Cesàrovou metodou* k číslu $\sigma \in \mathbb{C}$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = \sigma,$$

kde $s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$. Píšeme $(C)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$.

Definice 2. Nechť f má periodu $2L$. Pak *Fourierovy koeficienty funkce* f jsou definovány jako

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\,\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\,\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Fourierova řada pak je definována jako

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{kx\pi}{L}\right).$$

Hinty

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$$

$$\sin(nx) = \operatorname{Im} e^{inx} = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \qquad \cos(nx) = \operatorname{Re} e^{inx} = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

Goniometrické vzorce:
https://www.eeweb.com/tools/trigonometry-laws-and-identities-sheet/

Algoritmus pro Cesàrovu sumaci

1. Rozepíšeme členy posloupnosti.
2. Rozepíšeme částečné součty.
3. Zkusíme odhadnout součty částečných součtů.
4. Spočteme limitu.

Příklady

1. Sečtěte metodou aritmetických průměrů (pokud to lze):

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n$

2. Rozviňte funkci do obyčejné, sinové, kosinové Fourierovy řady s danou periodou. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a určete její součet.

   (a) $f(x) = 1 - x$ na $[0, 2)$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 2-x & x \in [1,2). \end{cases}$

   (c) jen sinovou a kosinovou: $f(x) = x \sin x$, $x \in (0, \pi)$

   (d) jen Fourierovu: $f(x) = x^2$ na $[-1, 1]$

3. Rozviňte funkci do Fourierovy řady. Vytvořte první 3 Cesàrovské součty a porovnejte, jak rychle konverguje obyčejná Fourierova řada vůči Cesàrovským součtům na obrázku tady: https://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am34/Mathematica/ch5/cesaro.html

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, -\frac{1}{2}), \\ 1, & x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ 0, & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

4. Nechť f je 2π-periodická funkce, nechť navíc $f \in C^1(\mathbb{R})$. Ukažte, že

   (a) jestliže $a_k = 0$ pro $\forall k \geq 0$, pak $f(x)$ je lichá;

   (b) jestliže $b_k = 0$ pro $\forall k \geq 1$, pak $f(x)$ je sudá.

(4) jak vypadá F. řada pro $f(x) \mp f(-x)$?