9. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická funkce taková, že $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Čísla

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N},$$

se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce f*.

Řadu

$$\mathcal{F}_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

nazýváme *Fourierovou řadou funkce f*. Píšeme $\mathcal{F}_f \sim f$.

Definice 2. Nechť f má periodu $2L$. Pak *Fourierovy koeficienty funkce f* jsou definovány jako

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Fourierova řada pak je definována jako

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{kx\pi}{L}\right).$$

Věta 3 (Jordanovo – Dirichletovo kritérium)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ je funkce s **konečnou variací** na intervalu $[0, 2\pi]$.

1. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak má funkce f v bodě x vlastní limitu zleva $f(x-)$ i zprava $f(x+)$ a platí
$$\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$
($s_n^f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, jde o částečné součty.)

2. Je-li navíc f spojitá na otevřeném intervalu (a, b), pak $\left\{s_n^f\right\}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f na (a, b).

Věta 4. Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ je funkce a $x \in \mathbb{R}$. Existují-li vlastní jednostranné limity $f(x-)$ a $f(x+)$ a také konečné limity

$$\lim_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x}, \qquad \lim_{t \to x+} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x},$$

pak

$$s_n^f(x) \to \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálně, pokud f má konečné jednostranné derivace v x, pak $s_n^f(x) \to f(x)$.

Fakta

Pro $m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos mx \,\mathrm{d}x = 0, \qquad m, n \geq 1,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m. \end{cases}$$

Hinty

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$$

$$\sin(nx) = \operatorname{Im} e^{inx} = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \qquad \cos(nx) = \operatorname{Re} e^{inx} = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

Goniometrické vzorce:
https://www.eeweb.com/tools/trigonometry-laws-and-identities-sheet/

Algoritmus

1. Načrtneme funkci včetně jejího 2π-periodického rozšíření.
2. Spočteme a_0, a_n, b_n (dáváme pozor na podmínky). Není funkce sudá/lichá?
3. Sestavíme Fourierovu řadu.
4. Zkontrolujeme původní funkci. Je spojitá? Je BV? Je C^1? Z vět pak vyplyne konvergence Fourierovy řady.
5. Dosadíme vhodný bod do řady a využijeme konvergenci.

Algoritmus pro sinové/kosinové řady

1. Načrtneme funkci a uděláme její lichou/sudou kopii. Až pak rozšíříme 2π-periodicky.
2. Postupujeme jako předtím. Využíváme lichosti/sudosti funkce.

Příklady

1. Rozviňte funkci do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a určete její součet. Určete pak součet číselných řad.

   (a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

   (b) * $f(x) = \cos^6 x$, $x \in (-\pi, \pi]$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0] \\ x, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$

   (d) $f(x) = \pi^2 - x^2$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

   Konverguje Fourierova řada stejnoměrně?

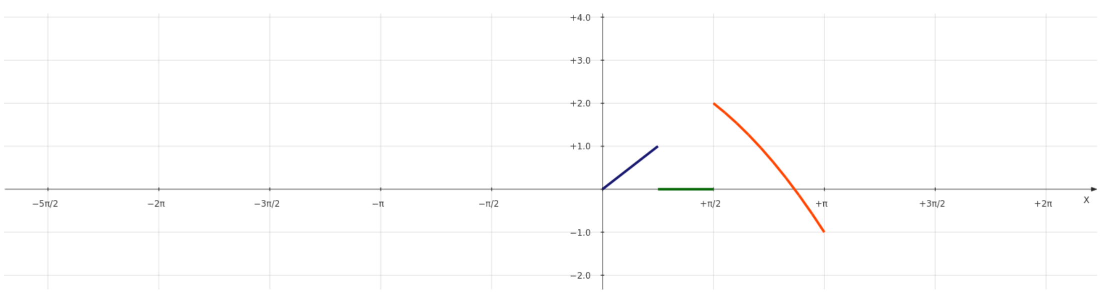
   (e) $f(x) = e^x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

   (f) $f(x) = \sin(3x) + 4x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n}$

   (g) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$

   (h) $f(x) = x^2$ $x \in [0, 2\pi)$,

2. Dokreslete funkci na π-periodickou, 2π-periodickou lichou a 2π-periodickou sudou:



3. Rozviňte funkci do sinové/kosinové Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a určete její součet. Určete pak součet číselných řad.

   (a) Sinovou i kosinovou
   $f(x) = x$ na $[0, \pi)$

   (b) V kosinovou řadu $f(x) = e^x$ na $[0, \pi)$

   (c) Kosinovou řadu $f(x) = \sin x$ na $[0, \pi)$
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n}$$

   (d) Sinovou řadu $f(x) = \cos(ax)$, $a > 0$ na $[0, \pi)$
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 - 4}$$

   (e) Kosinovou řadu $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin 3x)$ na $[0, \pi)$
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$$

   (f) V kosinovou řadu
   $$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos x, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

   (g) V sinovou řadu $f(x) = \cos 2x$ na $[0, \pi)$

4. Rozviňte funkci do Fourierovy řady s danou periodou. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a určete její součet.

   (a) $f(x) = \sin x$ na $x \in [0, \pi]$

   (b) $f(x) = \frac{x}{2}$ na $[-t, t)$, $t > 0$.

   (c) Fourierovu řadu, sinovou i kosinovou řadu funkce
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 2) \\ 2, & x \in [2, 4) \end{cases}$$

5. Zkouškové písemky doc. Rokyty

   (a) $f(x) = |\cos \frac{x}{2}|$ na $\mathbb{R}$. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč. Dosazením $x = \pi$ sečtěte příslušnou číselnou řadu.

   (b) $f(x) = \sinh ax$ na $[0, \pi)$, $a > 0$. Dodefinujte ji na celé $\mathbb{R}$ tak, aby ji bylo možno rozvinout do 2π-periodické Fourierovy řady, obsahující pouze siny. Tuto řadu spočtěte. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.

6. K jaké funkci konverguje následující funkce? Zakreslete.

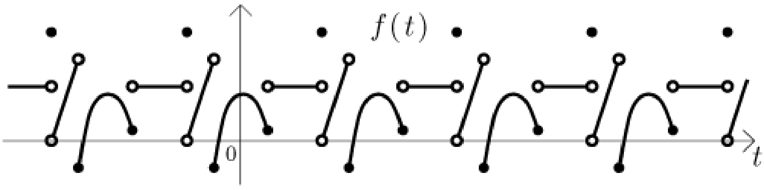


Figure 1: http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/3/txc3ea3f.htm

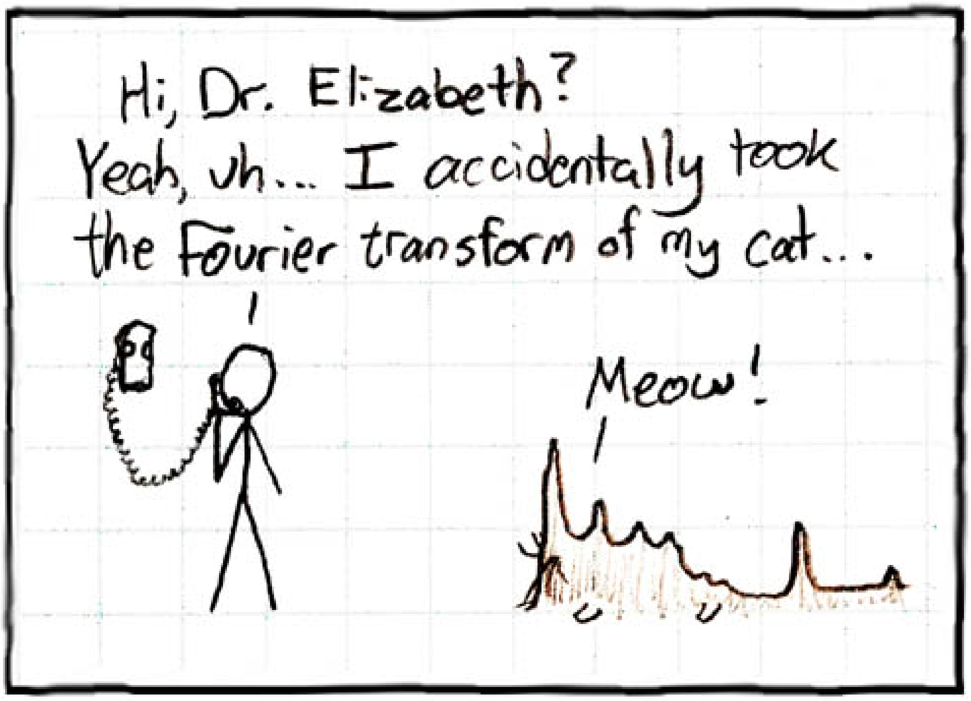


Figure 2: https://xkcd.com/26/

(1b) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
(1e) 2x per partes nebo komplex. exponenciela
(1f) $\sin 3x = \sin 3x$
(1h) pozor na interval
(3b) 2x per partes nebo komplex. exponenciela
(3c) 2x per partes nebo komplex. exponenciela nebo vzorce
(3d) 2x per partes nebo komplex. exponenciela, pozor na podmínky
(3f) 2x per partes nebo komplex. exponenciela nebo vzorce, pozor na podmínky
(4a) 2x per partes nebo komplex. exponenciela nebo vzorce
(4c) pozor, sinová a kosinová řada mají jinou periodu
(5a) např. vzorce
(5b) předpis pro sinh + komplexní integrál