8. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1

Definice 1. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Variaci funkce f na intervalu* $[a, b]$ definujeme předpisem

$$V_a^b(f) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|;\ \{x_i\}_{i=0}^n \text{ je dělení } [a, b]\right\}.$$

Řekneme, že funkce $g : I \to \mathbb{R}$ má na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ *omezenou variaci*, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $V_a^b(g) < K$ pro každý interval $[a, b] \subset I$.

Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu I značíme $BV(I)$.

Věta 2. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a $c \in (a, b)$. Pak $f \in BV([a, b])$ právě tehdy, když $f \in BV([a, c])$ a $f \in BV([c, b])$. Navíc

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Úloha 3. Spočtěte variace následujících funkcí:

1. x^2 na $[0, 1]$,

   Řešení:

   Pro monotónní funkce platí, že $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$. Tedy $V_0^1(x^2) = |1^2 - 0^2|$.

2. x^2 na $[-1, 1]$,

   Řešení:

   Z věty 2

   $$V_{-1}^1(x^2) = V_{-1}^0(x^2) + V_0^1(x^2).$$

   Na daných intervalech je monotónní, tedy $V_{-1}^1(x^2) = |0 - (-1)^2| + |1^2 - 0^2| = 2$.

3. $\sin x$ na $[0, 10\pi]$,

   Řešení: Po rozsekání intervalů tak, aby tam byl $\sin x$ monotónní, vyjde $V_0^{10\pi}(\sin x) = 20$.

4. $\frac{1}{2}\lfloor x \sin \frac{\pi x}{2} \rfloor$ na $[-4, 4]$

   Řešení: Z grafu je vidět, že intervaly lze opět rozsekat tak, aby tam funkce byla monotónní (i když ne nutně spojitá). Zkontrolujeme hodnoty v bodech -4 a 4 a pak poscítáme skoky nahoru a dolů. Vyjde $V_{-4}^4(f) = 10$.

https://www.geogebra.org/calculator/ccpnefwv

Úloha 4. Ukažte, že Dirichletova funkce

$$f = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nemá konečnou variaci na $[0, 1]$.

Řešení:

Zafixujme pevné (pro jednoduchost navíc sudé) n a zvolme dělení $\{0 = x_0, x_1, \dots, x_n = 1\}$ intervalu $[0, 1]$ tak, aby všechna sudá x_i byla racionální čísla a všechna lichá x_i byla iracionální. Pak

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = n.$$

(n-krát skáčeme nahoru a dolů.)

Protože množiny $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v $\mathbb{R}$, tak takové dělení lze najít pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pak $V_a^b(D(x)) = \sup\{n\} = \infty$.

Úloha 5. Ukažte, že funkce

$$f = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nemá konečnou variaci na $[0, 1]$.

https://www.geogebra.org/calculator/wsv9c6hc

Řešení: Pro pevné n zvolme dělení $0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$. Hodnoty f v těchto bodech pak jsou

$$0, \frac{(-1)^n}{2n}, 0, \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, 0, \dots, \frac{-1}{6}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{2}, 0.$$

Pak

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, tak funkce f nemá konečnou variaci.

Věta 6. Nechť f je spojitá na $[a, b]$ a f' existuje a je omezená na (a, b). Pak $f \in BV([a, b])$.

Úloha 7. Ukažte, že funkce

$$f = \begin{cases} x^2 \sin \frac{2\pi}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

má konečnou variaci na $[0, 1]$.

https://www.geogebra.org/calculator/fcagxskk

Řešení:
Dle věty 6 stačí ukázat, že je funkce spojitá na $[0,1]$ a má omezenou derivaci na (a,b).

Spojitost: f je zjevně spojitá na $(0,1]$. V nule je

$$\lim_{x\to 0+} x^2 \sin\frac{2\pi}{x} = 0$$

(omezená krát mizející funkce), tedy je tam spojitá zprava.

Derivace: na $(0,1)$ máme

$$f'(x) = 2x\sin\frac{2\pi}{x} + x^2\cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)\frac{-2\pi}{x^2} = 2x\sin\frac{2\pi}{x} - 2\pi\cos\left(\frac{2\pi}{x}\right).$$

což je na $(0,1)$ omezená funkce.

Tedy funkce f je BV.

Úloha 8. Dokažte nebo najděte protipříklad

- $f \in BV[a,b] \Rightarrow |f| \in BV[a,b]$?

  Řešení: Pravda. Plyne z nerovnosti

  $$||f(x_i)| - |f(x_{i-1})|| \le |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

- $|f| \in BV[a,b] \Rightarrow f \in BV[a,b]$?

  Řešení: Nepravda. Uvažujme např. upravenou Dirichletovu funkci

  $$f = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

  Pak f určitě není BV, ale $|f| = 1$ a $V_a^b(1) = 0$.

Úloha 9. Dokažte nebo najděte protipříklad. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

- jestliže f je omezená, pak je BV,

  Řešení: Nepravda. Např. Dirichletova funkce.

- jestliže f je BV, pak je omezená.

  Řešení: Pravda.

  Zvolme $x \in (a,b)$. Pak $\{a,x,b\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ a tedy existuje K takové, že $|f(x)-f(a)| + |f(b)-f(x)| \le K$. Pak

  $$|f(x)| \le |f(a)| + |f(x)-f(a)| \le |f(a)| + |f(x)-f(a)| + |f(b)-f(x)| \le |f(a)| + K.$$

  (Pro krajní body volíme dělení $\{a,b\}$.)

Věta 10. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pak $f \in BV([a, b])$ právě tehdy, když existují neklesající a omezené funkce $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ takové, že $f = g - h$.

Úloha 11. Ukažte, že jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f, g \in BV([a, b])$, pak i $f + g \in BV([a, b])$ a $\alpha f \in BV([a, b])$

Řešení: Jelikož f i g jsou BV, lze je rozepsat jako

$$f = f_1 - f_2 \qquad g = g_1 - g_2,$$

kde f_1, f_2, g_1 a g_3 jsou neklesající a omezené funkce.

Pak

$$f - g = f_1 - f_2 + (g_1 - g_2) = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2).$$

Součet dvou neklesajících funkcí je opět neklesající funkce. Díky Větě 10 pak platí, že $f + g$ je BV.

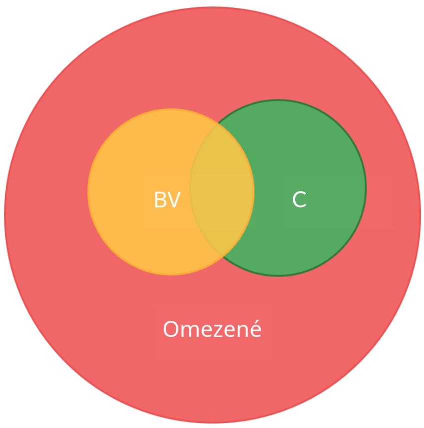
Analogicky, pro $\alpha \geq 0$ máme

$$\alpha f = \alpha f_1 - \alpha f_2,$$

pro $\alpha < 0$

$$\alpha f = -|\alpha| f_1 + |\alpha| f_2.$$

Úloha 12. Nakreslete Vennův diagram pro funkce spojité, omezené a BV na $[a, b]$.



2

Definice 13. Řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každou konečnou posloupnost bodů $a \leq a_1 \leq b_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b$ máme

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n}|f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme $AC([a, b])$.

Úloha 14. Ukažte z definice, že funkce $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ a $h(x) = \sqrt{x}$ jsou absolutně spojité na $[0, 1]$.

Řešení:

Nechť $f(x) = x$. Mějme $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta = \varepsilon$ a zvolme posloupnost bodů $a \leq a_1 \leq b_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta.$$

Pak

$$\sum_{j=1}^{n}|f(b_j) - f(a_j)| = \sum_{j=1}^{n}|b_j - a_j| = \sum_{j=1}^{n} b_j - a_j < \varepsilon,$$

což bylo dokázati.

Nechť $g(x) = x^2$. Mějme $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta = \varepsilon$ a zvolme posloupnost bodů $a \leq a_1 \leq b_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta.$$

Pak, protože $b_j, a_j \leq 1$,

$$\sum_{j=1}^{n}|g(b_j) - g(a_j)| = \sum_{j=1}^{n}(b_j)^2 - (a_j)^2 = \sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j)(b_j + a_j) \leq 2\sum_{j=1}^{n} b_j - a_j < 2\varepsilon,$$

což bylo dokázati.

Nechť $h(x) = \sqrt{x}$. Mějme $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta = \varepsilon^2$ a zvolme posloupnost bodů $a \leq a_1 \leq b_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta.$$

Zafixujme $c = \varepsilon^2/4$. Předpokládejme, že c neleží v žádném intervalu $[a_j, b_j]$ (pokud ano, rozsekneme interval v bodě c). Najděme m tak, že $b_m < c < a_{m+1}$.

Rozdělme nyní sumu na dvě části. Protože $\sqrt{x}$ je rostoucí funkce, máme

$$\sum_{j=1}^{m}|h(b_j) - h(a_j)| = \sum_{j=1}^{m}|\sqrt{b_j} - \sqrt{a_j}| = \sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j} - \sqrt{a_j} \leq \sqrt{c} - 0 < \varepsilon/2.$$

Pro druhou část

$$\sum_{j=m+1}^{n} |h(b_j)-h(a_j)| = \sum_{j=m+1}^{n} |\sqrt{b_j}-\sqrt{a_j}| = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{b_j-a_j}{\sqrt{b_j}+\sqrt{a_j}} \leq \sum_{j=m+1}^{n} \frac{b_j-a_j}{\sqrt{c}} < \frac{1}{\frac{\varepsilon}{2}}\varepsilon^2 = 2\varepsilon.$$

Dohromady

$$\sum_{j=1}^{n} |h(b_j)-h(a_j)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\varepsilon = \frac{5}{2}\varepsilon,$$

což bylo dokázati.

Úloha 15. Ukažte, že Cantorova funkce (která je spojitá i stejnoměrně spojitá) je na intervalu $[0,1]$ BV, ale není absolutně spojitá.
https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorova_funkce

Řešení:

Cantorova funkce je monotónní, tedy je BV.

Pro vyvrácení absolutní spojitosti je třeba ukázat, že existuje $\varepsilon = \frac{1}{2}$, že pro každé $\delta > 0$ a každou posloupnost bodů $a \leq a_1 \leq b_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta$$

je

$$\sum_{j=1}^{n} (f(b_j) - f(a_j)) > \frac{1}{2}.$$

Cantorovu množinu (CD) lze definovat např. jako průnik množin C_n, ze kterých jsme vždy v n-tém kroku odebrali prostřední třetiny.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorovo_diskontinuum

Tyto množiny (a tedy CD) lze pokrýt intervaly $[a_j, b_j]$, z nichž každý má délku $1/3^n$ a dohromady jich je 2^n.

Pro dané δ tedy zvolme n tak, že $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \delta$. Pak

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta.$$

Ale protože Cantorova funkce se „mění“ jen na CD, musí být

$$\sum_{j=1}^{n} (f(b_j) - f(a_j)) = 1.$$

Tedy Cantorova funkce není AC.

Úloha 16. Najděte funkci, která není absolutně spojitá, ale má konečnou variaci.

Řešení:

Např. Cantorova funkce.

Úloha 17. Rozhodněte, zda má AC funkce nutně omezenou derivaci.
Řešení:
Nepravda. Protipříklad $\sqrt{x}$.

Úloha 18. Dokažte nebo najděte protipříklad

- $f \in AC[a,b] \Rightarrow |f| \in AC[a,b]$?

  Řešení:

  Pravda. Plyne z
  $$||f(x_i)| - |f(x_{i-1})|| \leq |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

- $|f| \in AC[a,b] \Rightarrow f \in AC[a,b]$?

  Řešení: Nepravda. Uvažujme např. upravenou Dirichletovu funkci
  $$f = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

  Pak f není ani spojitá, ale $|f| = 1$ je AC.

Úloha 19. Nechť $f, g \in AC([a,b])$. Ukažte, že pak i $fg \in AC([a,b])$.
Řešení:
Protože f i g jsou spojité na uzavřeném intervalu, musí být i omezené. Tedy $|f| < M$ a $|g| < M$ pro $M > 0$.

Dále zvolme $\delta > 0$ tak, že pro posloupnost posloupnost bodů $a \leq a_1 \leq b_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b$ máme
$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta$$
pak
$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon, \qquad \sum_{j=1}^{n} |g(b_j) - g(a_j)| < \varepsilon.$$

Potom
$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j)g(b_j) - f(a_j)g(a_j)| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(b_j)| \cdot |g(b_j) - g(a_j)| + |g(a_j)| \cdot |f(b_j) - f(a_j)| < M\varepsilon + M\varepsilon.$$

3

Definice 20. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$ a $K > 0$. Řekneme, že zobrazení f je K-lipschitzovské, jestliže
$$\forall x, y \in X : \sigma(f(x), f(y)) \leq K\rho(x, y).$$

Řekneme, že f *lipschitzovské*, jestliže existuje $K > 0$ takové, že f je K-lipschitzovské.
Pro $X = Y = \mathbb{R}$ dostaneme

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Poznámka 21. Zatímco AC a BV funkce pracovaly s uzavřeným a omezeným intervalem $[a, b]$, tak u lipschitzovských funkcí může být interval otevřený i neomezený.

Úloha 22. Ukažte, že funkce jsou lipschitzovské

1. $|x|$ na $[-1, 1]$

   Řešení: Zvolme $x, y \in [-1, 1]$. Pak

   $$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

   (Lipschitzovská konstanta je 1.)

2. x^2 na $[1, 2]$

   Řešení:

   Zvolme $x, y \in [1, 2]$. Pak

   $$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq (2 + 2)|x - y|.$$

   (Lipschitzovská konstanta je 4.)

3. x na $\mathbb{R}$

   Řešení: Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí, že

   $$|x - y| \leq 1 \cdot |x - y|.$$

   (Lipschitzovská konstanta je 1.)

Úloha 23. Ukažte, že funkce nejsou lipschitzovské

1. x^2 na $\mathbb{R}$

   Řešení:

   Zvolme $N > 0$ a $x = N$ a $y = 2N$. Pak

   $$|x^2 - y^2| = 3N^2 = 3N|x - y| > N|x - y|.$$

2. $\sqrt{x}$ na $[0, 1]$

   Problém je poblíž 0. Zvolme tedy $1 > n > 0$ (malé n) a $x = 0$ a $y = 1/n$. Pak

   $$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \sqrt{n}|x - y|.$$

   Ale protože pro každé $N > 0$ najdeme n tak, že $N < \sqrt{n}$, dostaneme

   $$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| > N|x - y|.$$

Úloha 24. Nechť X je množina slov skládající se z 10 písmen (používáme 26 prvkovou anglickou abecedu). Metriku ρ definujme jako počet pozic s rozdílnými písmeny. Např.

$$\begin{aligned}\rho(JEDNOROZCI, CHOBOTNICE) &= 8,\\ \rho(LOSANGELES, LOUISVILLE) &= 7,\\ \rho(ABCXYZQRTY, AACXYUQRTY) &= 2.\end{aligned}$$

Pro slovo z 10 písmen $\alpha = x_1, x_2, \dots x_{10}$ definujme zobrazení

$$f(\alpha) = a, x_2, \dots, x_{10}$$

(první písmeno jsme nahradili písmenem a).

Rozhodněte, zda je f lipschitzovské zobrazení.

Řešení:

Uvažujme slova α a β, která už mají první písmeno shodné. Pak

$$\rho(f(\alpha), f(\beta)) = \rho(\alpha, \beta).$$

Pokud slova α a β naopak mají první písmeno rozdílné, tak se jejich vzdálenost o 1 zmenší, tedy

$$\rho(f(\alpha), f(\beta)) = \rho(\alpha, \beta) - 1 < \rho(\alpha, \beta).$$

Lipschitzovská konstanta je tedy rovna 1.

Úloha 25. Nechť f, g jsou lipschitzovské na $\mathbb{R}$. Ukažte, že je lipschitzovská i funkce

1. $f + g$

   Řešení:

   Pro $x, y \in \mathbb{R}$ máme $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$ a $|g(x) - g(y)| < L|x - y|$. Pak

   $$|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)| \leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \leq K|x-y|+L|x-y| = (K+L)|x-y|.$$

2. $f(g)$

   Řešení: Pro $x, y \in \mathbb{R}$ máme $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$ a $|g(x) - g(y)| < L|x - y|$. Pak

   $$|f(g(x)) - f(g(y))| \leq K|(g(x)) - (g(y))| \leq KL|x - y|.$$

Úloha 26. Ukažte, že lipschitzovská funkce má konečnou variaci (na intervalu $[a, b]$).

Řešení:

Zvolme dělení $\{x_i\}$ intervalu$[a, b]$. Pak

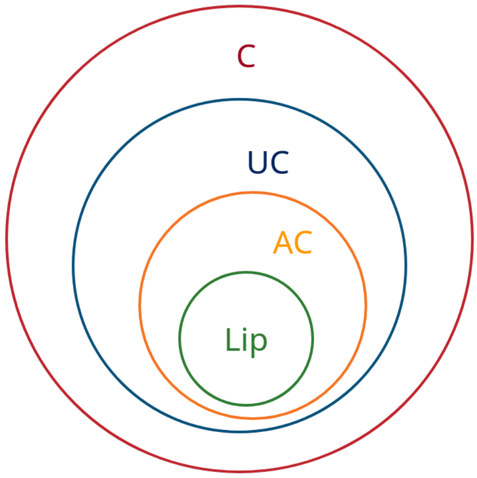
$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} K|x_i - x_{i-1}| \leq K|b - a|.$$

Úloha 27. Najděte funkci, která je AC, ale není Lip.

Řešení:

Např. $\sqrt{x}$.

Úloha 28. Nakreslete Vennův diagram pro funkce spojité (C), lipschitzovské (Lip), stejnoměrně spojité (UC) a absolutně spojité (AC) na $[a, b]$.



Úloha 29. Vyslovte (a zdůvodněte) hypotézu o vztahu omezených a lipschitzovských funkcí. Jsou tam nějaké podmínky?

Řešení:

Lipschitzovská funkce nemusí být omezená, např. x na $\mathbb{R}$.

Omezená funkce nemusí být lipschitzovská, např. $\sqrt{x}$ na $[0, 1]$.

Ale pokud jsme na omezeném intervalu $[a, b]$, pak lipschitzovská funkce musí být omezená. Např. proto, že je spojitá na kompaktu, tedy omezená.

Opačně to stále neplatí ani pro kompaktní interval.

Úloha 30. Je nějaký vztah mezi lipschitzovskými a diferencovatelnými funkcemi na $[a, b]$?

Řešení:

Na přednášce byla věta: Lipschitzovská funkce na $[a, b]$ má konečnou derivaci skoro všude na $[a, b]$.

Obecně lipschitzovská funkce nemusí mít derivaci, např. $|x|$.

Pokud ale je f diferencovatelná na $[a, b]$ a navíc $|f'| < M$, tak už je lipschitzovská.

Zvolme $a \leq x \leq y \leq b$. Pak z Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje ξ tak, že $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$. Pak

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y - x| \leq M|y - x|.$$