7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Sečtěte následující řady:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

   Řešení:

   Minule jsme spočetli, že

   $$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k = \frac{2x}{(1-x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

   Dosazením $x = \frac{1}{2}$ dostaneme

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^3} = 8.$$

   Jsme uvnitř kruhu konvergence, tedy není potřeba používat Abelovu Větu.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{1}{5^{2n}}$

Nyní zjistíme součet zadané číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{3}} x^{n-1} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{1-x} = \Big[-\ln|1-x| \Big]_0^{\frac{1}{3}} =$$
$$= -\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \ln 1 = -\ln \frac{2}{3} = \ln \frac{3}{2}.$$

1b

$$\text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \left(\frac{1}{5}\right)^{2n}.$$

Řešení. Uvažujme mocninnou řadu ve tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$. Součet řady určíme z rovnosti $\left(x^{2n+1}\right)' = (2n+1)x^{2n}$. Dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(x^{2n+1}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \right)'.$$

Tato řada je geometrická s kvocientem $q = -x^2$, kde $|x| < 1$ a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} = x - x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Proto můžeme napsat, že

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \right)' = \left(\frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Dosazením za $x = \frac{1}{5}$ dostaneme hledaný součet řady. Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \left(\frac{1}{5}\right)^{2n} = \frac{1 - \frac{1}{5^2}}{\left(1 + \frac{1}{5^2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{25}}{\left(1 + \frac{1}{25}\right)^2} = \frac{24 \cdot 25^2}{25 \cdot 26^2} = \frac{150}{169}.$$

Cvičení 9.2. Určete součet číselných řad pomocí součtu mocninné řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n}$ $\left[\ln \frac{4}{3}\right]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ $\left[\frac{80}{27}\right]$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\left[\frac{8}{7}\right]$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Řešení:

Řada konvegruje podle Leibnizova kritéria. Podle Abelovy věty je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{x\to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k.$$

Označme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k.$$

Potom na kruhu konvergence platí

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x}^{k-1} = -\frac{1}{1+x},$$

a tedy

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x} = -\ln(1+x) + C,$$

přičemž, protože $f(0) = 0$, je $C = 0$. Odtud vyplývá, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{x\to 1-} f(x) = -\ln 2.$$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$

Řešení: Namísto $(-1)^k/3^k$ budeme psát x^k a potom dosadíme $x = -\frac{1}{3}$. Sečtěme tedy řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k.$$

Poloměr konvergence je roven jedné. Je

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k = x\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k\right)' = x\cdot\left(x\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} k x^k\right)'\right)' = x\cdot\left(x\cdot\left(x\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\right)'\right)' =$$

$$= x\cdot\left(x\cdot\left(x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)'\right)' = x\cdot\left(x\cdot\left(x\cdot\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)\right)'\right)' =$$

$$= x\cdot\left(x\cdot\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'\right)' = x\cdot\left(x\cdot\left(\frac{1+x}{(1-x)^3}\right)\right)' =$$

$$= x \cdot \left(\frac{x + x^2}{(1-x)^3} \right)' = \frac{x(1 + 4x + x^2}{(1-x)^4}.$$

Odvodili jsme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k = \frac{x(1 + 4x + x^2}{(1-x)^4}, \qquad |x| < 1.$$

Nyní dosazením $x = -\frac{1}{3}$ do levé a pravé strany dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} k^3 = \frac{3}{128}.$$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Řešení:

Řada je konvergentní. Lze ji sečíst elementárně pomocí vztahu

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Snadno tak dostaneme, že

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \to \infty} = 1.$$

Nicméně to zkusme Abelovou metodou. Za tím účelem sečteme řadu

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}.$$

Na kruhu konvergence je

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},$$

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x},$$

a proto

$$f'(x) = \int \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln(1-x) + C_1,$$

přičemž $f'(0) = 0$, a tedy $C_1 = 0$. Nyni integrací per partes (s funkcemi $u' = 1$ a $v = \ln(1-x)$) dostaneme

$$f(x) = x - x \ln(1-x) + \ln(1-x) + C_2,$$

opět je zřejmě $f(0) = 0$, a proto $C_2 = 0$. Nakonec, podle Abelovy věty, platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x - x\ln(1-x) + \ln(1-x) = \lim_{x\to 1-} x + \ln(1-x)(1-x) = 1.$$

(Poslední limita se dá vyřešit l'Hospitalem.)

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+2n)\frac{1}{3^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

Pokud je k liché, pak platí $a_k a_{2n-k} = 0 \cdot 0 = 0$. Počet sudých čísel v množině $\{0, 1, \dots, 2n\}$ je roven $n + 1$. Máme tedy $b_{2n} = (-1)^n(n + 1)$.

Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mají čísla k a $2n + 1 - k$ rozdílnou paritu, a proto je právě jedno z čísel a_k a a_{2n+1-k} rovno 0. Odtud plyne, že $b_{2n+1} = 0$.

Výsledná řada má tedy tvar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1) x^{2n}, \qquad x \in (-1, 1).$$

$\clubsuit$

8.5.8. Příklad. Rozviňte funkci $f(x) = \sin^2 x$ do mocninné řady.

Řešení. Podle vzorce pro sin polovičního úhlu a podle známé mocninné řady pro cos dostáváme

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} .$$

$\clubsuit$

12

8.5.9. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 3} .$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 3} x^{2n+3} .$$

Snadno zjistíme, že poloměr konvergence je $R = 1$. Posloupnost $\frac{1}{2n+3}$ monotónně klesá k nule, a tedy podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1) tato mocninná řada konverguje i pro $x = 1$. Z Abelovy věty tedy dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 3} = f(1) = \lim_{x \to 1-} f(x) .$$

Podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 8.2.2) platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2} = \frac{x^2}{1 + x^2} ,$$

kde jsme v posledním kroku využili vzorce pro součet geometrické řady. Snadnou integrací dostaneme

$$f(x) = \int \frac{x^2}{1 + x^2}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx = \underline{x - \arctan x + C} .$$

Dosazením $x = 0$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} 0^{2n+3} = 0 - \arctan 0 + C \;,$$

a tedy $C = 0$. Součet zadané řady nyní dopočteme podle Abelovy věty

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} = \lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (x - \arctan x) = 1 - \frac{\pi}{4} \;.$$

♣

8.5.10. Příklad. Sečtěte řadu

1f

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) \frac{1}{3^n} \;.$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

pro $x \in (-1, 1)$. Pravou stranu můžeme snadno derivovat, a tedy podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 8.2.2) platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \;.$$

První člen řady je nulový, a proto opětovným použitím věty o derivaci mocninné řady dostaneme

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \;.$$

Z posledních dvou rovností snadno dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) x^n &= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n) x^{n-2} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \\ &= x^2 f''(x) + 3x f'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{3x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

pro všechna $x \in (-1, 1)$. Dosazením $x = \frac{1}{3}$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) \frac{1}{3^n} = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3 \;.$$

♣

1b

8.5.11. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} .$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} x^{2n+1} .$$

Snadno zjistíme, že poloměr konvergence této mocninné řady je $R = 1$ a že tato řada konverguje i pro $x = 1$. Z Abelovy věty (Věta 8.3.2) tedy dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = f(1) = \lim_{x \to 1-} f(x) .$$

Podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 8.2.2) platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1} . \tag{8.11}$$

Poslední řadu si označme $g(x)$. Tato řada má poloměr konvergence 1, a z věty o derivaci mocninné řady dostaneme pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$g'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2} ,$$

kde jsme v posledním kroku použili vzorec pro součet geometrické řady. Integrací spočteme

$$g(x) = \int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} \right) dx = \frac{1}{2} \log(x+1) - \frac{1}{2} \log(1-x) + C .$$

Dosazením $x = 0$ do řady pro $g(x)$ lehce dopočteme $C = 0$. Z (8.11) máme

$$f'(x) = x g(x) = \frac{1}{2} x \log(x+1) - \frac{1}{2} x \log(1-x) .$$

Standardní integrací pomocí per-partes a rozkladu na parciální zlomky, kterou zde nebudeme detailně rozepisovat, lze z tohoto spočítat

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \log(1+x) + \frac{1}{2} x^2 \log(1+x) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \log(1-x) + \frac{1}{2} x^2 \log(1-x) \right) + C_2 \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \log \frac{x+1}{1-x} + \frac{1}{4} x^2 \log \frac{x+1}{1-x} + C_2 . \end{aligned}$$

Dosazením $x = 0$ pak snadno zjistíme, že $C_2 = 0$. Podle Abelovy věty dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(x^2 - 1) \log \frac{x+1}{1-x} = \underline{\frac{1}{2}}\,,$$

kde jsme v posledním kroku mimo jiné využili známou limitu $\lim_{x \to 1-}(x-1)\log(1-x) = 0$. ♣

8.5.12. Příklad. Rozhodněte, pro která $k \in \mathbb{N}$ je limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^k} \tag{8.12}$$

konečná a nenulová.

Řešení. Jest

$$\frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^{k+1}}.$$

Podle 8.6 a 7.3.5 máme

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x \cos x &= (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o(x^6) \\ &= x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Odtud a z 7.3.4 dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} &= \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^k} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^k}. \end{aligned}$$

Protože $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, plyne z věty o aritmetice limit, že pro volbu $k = 3$ je hledaná limita konečná a nenulová, přesněji

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^3} = -\frac{2}{3}.$$

Opětovným použitím věty o aritmetice limit odtud ihned dostaneme, že pro $k = 1$ nebo $k = 2$ platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} = 0.$$

Konečně pro sudé číslo k, $k > 3$, platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} = \infty$$

a pro liché číslo k, $k > 3$, limita (8.12) neexistuje. ♣

(i) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$

Řešení:

Sčítáme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1},$$

která konverguje z Leibnize.

Zaveďme řadu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{3n+1}}{3n+1},$$

do které pak budeme dosazovat $x = -1$. Daná řada má poloměr konvergence roven 1. Na intervalu $(-1, 1)$ ji tedy můžeme zderivovat:

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} -x^{3n} = -\sum_{n=0}^{\infty} (x^3)^n = \frac{-1}{1-x^3}$$

Po integraci parciálními zlomky dostaneme

$$f(x) = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln\left|4x^2 + 4x + 4\right| - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + C$$

Po dosazení $x = 0$ máme

$$0 = f(0) = -\frac{1}{6} \ln 4 - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arctan} \frac{1}{\sqrt{3}} + C = -\frac{1}{6} \ln 2^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} + C$$

Tedy

$$C = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6}$$

Celkem tedy

$$f(x) = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln\left|4x^2 + 4x + 4\right| - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6}$$

Abychom mohli dosadit $x = 1$, aplikujeme Abelovu větu (konvergenci už máme), tedy:

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-1)^{3n+1}}{3n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-1)((-1)^3)^n}{3n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Pro limitu dostaneme

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} & \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln\left|4x^2 + 4x + 4\right| - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + \\
& \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} \\
= & \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{6} \ln 4 - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arctan} \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} \\
= & \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Závěr:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}.$$

2. Sečtěte následující řady (bonus k minulému cviku):

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!}$

Řešení:

Poloměr konvergence je $R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$, řada tedy absolutně konverguje pro $x \in \mathbb{R}$.

Po úpravě
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!} = x^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{n!} = x^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^4)^n}{n!} = x^5 e^{(x^4)}.$$

Použili jsme fakt, že $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ pro $y \in \mathbb{R}$ a tedy $e^{x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^4)^n}{n!}$ pro $y \in \mathbb{R}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

Řešení:

Poloměr konvergence je 1, v krajních bodech řada diverguje.

Po úpravách máme:
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \right)'$$

Navíc máme
$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Po zpětném dosazení dostaneme
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \right)' = x \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = x((1+x)/(1-x)^3)$$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2) x^n$

Řešení:

Poloměr konvergence je 1, v krajních bodech řada diverguje.

Upravíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n \overset{!}{=} \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^{n+1} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n+2}\right)'.$$

Díky první úpravě, kdy jsme vytkli $1/x$, nemůžeme pracovat na celém intervalu $(-1,1)$. V dalších krocích budeme tedy sčítat řadu zvlášť na intervalech $(-1,0)$ a $(0,1)$.
Dále

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n+2} = x^3\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = x^3\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x^3\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x^3}{(1-x)^2}.$$

Dohromady tedy máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1}{x}\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3} = \frac{x(3-x)}{(1-x)^3}.$$

Máme sečteno na $(-1,0)$ a $(0,1)$. Protože ale řada je pro $x=0$ rovna 0, lze výsledek dohormady zapsat jako $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n = \frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$ pro všechna $x \in (-1,1)$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)(n+3)x^{2n}$

Řešení: Poloměr konvergence je roven 1, řada v krajích diverguje.
Nahradíme $x^{2n} = y^n$ a budeme sčítat řadu (také má poloměr konvergence 1)

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+3)y^n &= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+3)y^n = y^2\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+3)y^{n-2}\\ &= y^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}(n+3)y^{n-1}\right)'\end{aligned}$$

Dále pro intervaly $(-1,0)$ a $(0,1)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}(n+3)y^{n-1} &= \frac{1}{y^3}\sum_{n=2}^{\infty}(n+3)y^{n+2} = \frac{1}{y^3}\left(\sum_{n=2}^{\infty} y^{n+3}\right)' = \frac{1}{y^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} y^{n+5}\right)'\\ &= \frac{1}{y^3}\left(y^5\sum_{n=0}^{\infty} y^n\right)' = \frac{1}{y^3}\left(y^5\frac{1}{1-y}\right)' = \frac{y(5-4y)}{(1-y)^2}\end{aligned}$$

Dohromady tedy pro $y \in (-1,0)$ a $y \in (0,1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n+3)y^n = y^2\left(\frac{y(5-4y)}{(1-y)^2}\right)' = \frac{-y^2(3y-5)}{(1-y)^3}.$$

Jelikož součet pro $y = 0$ je roven 0, lze psát pro $y \in (-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n+3)y^n = \frac{-y^2(3y-5)}{(1-y)^3}.$$

Pro původní řadu pak dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n+3)x^{2n} = \frac{-x^4(3x^2-5)}{(1-x^2)^3}.$$