7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Abel)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada. Nechť $r>0$. Pokud $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konverguje, pak mocninná řada konverguje stejnoměrně na $[x_0, x_0+r]$ a

$$\lim_{x\to x_0+r-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

(Věta samozřejmě platí i pro variantu $\lim_{x\to(x_0-\bar{r})+}$.)

Fakta

Nechť $a>0$, pak:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$
5. $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad |q|<1$

Algoritmus

1. Přepíšeme řadu na tvar $\sum a_n x^n$ s tím, že nás zajímá konkrétní x. Může být výhodné užít např. x^{2n+1} místo x^n. (Pokud tam není žádné hezké číslo na n-tou, může to být 1^n).
2. Chováme se k příkladu jako minule: poloměr konvergence, součet pomocí derivace nebo integrace...
3. Do výsledného součtu dosadíme naše konkrétní x - pokud je na kraji poloměru konvergence, použijeme Abelovu větu.
4. Pokud to není v zadání, tak nemusíme vyšetřovat chování na celém poloměru konvergence a v obou krajních bodech - jde nám jen o konkrétní x.

Příklady

1. Sečtěte následující řady:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{1}{5^{2n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+2n) \frac{1}{3^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

(i)* $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$

2. Sečtěte následující řady (bonus k minulému cviku):

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

(c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2) x^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n+3) x^{2n}$

(1h) $4n^2 - 1 = (2n+1)(2n-1)$

(1i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$, pak parc. zlomky

(2c) vytkněte $1/x$ a roztrhněte interval konvergence

(2d) analogicky 2c