6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť ρ je poloměrem konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Pak poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}$$

je také roven ρ.

Pro $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < \rho$ definujme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Pak funkce f má vlastní derivace v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < \rho$ a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}.$$

Věta 2. Mějme mocninnou řadu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence $\rho > 0$. Potom pro každé x takové, že $|x-x_0| < \rho$ platí, že funkce F definovaná předpisem

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

má v bodě x derivaci rovnou $F'(x) = f(x)$.

Věta 3 (Abel)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada. Nechť $r > 0$. Pokud $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konverguje, pak mocninná řada konverguje stejnoměrně na $[x_0, x_0+r]$ a

$$\lim_{x \to x_0+r-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

(Věta samozřejmě platí i pro variantu $\lim_{x \to (x_0-\bar{r})+}$.)

Fakta

Nechť $a > 0$, pak:

1. $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
2. $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$
4. $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$
5. $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad |q| < 1$

Algoritmus

1. Najdeme poloměr konvergence.
2. Odhadneme, na jakou řadu budeme převádět (najdeme podobného Taylora, kterého umíme sečíst).
3. Rozhodneme, zda budeme spíš
   (a) integrovat - členy nx^n
   (b) derivovat - členy x^n/n
4. Pokud je to nutné, řadu upravíme - např. $\sum \frac{x^n}{n-1} = x \sum \frac{x^{n-1}}{n-1}$.
5. Zderivujeme/zintegrujeme a sečteme.
6. Zintegrujeme/zderivujeme zpátky. U integrálů nezapomeneme na konstanty.
7. Zkontrolujeme krajní body - jestliže tam původní řada konverguje, aplikujeme Abelovu větu.

Příklady

1. Derivováním člen po členu sečtěte následující řady:

   (a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$ (b) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

2. Integrováním člen po členu sečtěte následující řady:

   (a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$ (b) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

3. Derivováním nebo integrováním člen po členu sečtěte následující řady:

   (a) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$
   (b) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

Zkouškové příklady

4. Sečtěte řadu

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n+2}}{n!}$

(2a) $= x \sum nx^{n-1}$
(2b) $x \sum n(n+1)x^{n-1}$
(3b) Trik $x \sum nx^{n-1}$
(4a) $x^{n+2} = xx^{n+1}$
(4b) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$