5. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. *Mocninnou řadou o středu* $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $a_k \in \mathbb{R}$ pro $k \in \mathbb{N}_0$.

Věta 2 (Poloměr konvergence)**.** Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $\rho \in \mathbb{R}^*$ takový, že

- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < \rho$, uvedená řada konverguje absolutně,
- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| > \rho$, uvedená řada diverguje.

Prvek ρ splňuje

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

kde výrazem $1/0$ zde rozumíme $+\infty$ a výrazem $1/\infty$ zde rozumíme 0. Prvek ρ nazýváme *poloměrem konvergence* uvedené řady.

Věta 3. Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost s **kladnými** členy, splňující podmínku

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = A.$$

Pak také

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A.$$

Věta 4. Nechť $\{a_n\}$ je reálná posloupnost, jejíž všechny členy jsou **kladné**. Nechť dále platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Potom platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Fakta

Nechť $a > 0$, pak:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Hint

$$a^b = e^{b \ln a}$$

$$n!! = n(n-2)(n-4)\cdots$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}, \qquad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Příklady

1. Určete poloměr konvergence ρ následujících mocninných řad a také konvergenci na hranici.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n$, kde $(0 < \alpha < 1)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$, kde $p \in \mathbb{R}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} \cdot x^n$, kde $(a > 1)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$

(e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$

(f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$

(g)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$, kde $a > 0$, $b > 0$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

(j)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$, kde $a > 0$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) \cdot x^n$, kde $a > 0$, $b > 0$.

Bonus

2. Víme, že řada $\sum a_n(x+7)^n$ konverguje pro $x = 0$ a diverguje pro $x = -17$. Co můžeme říct o poloměru konvergence?

3. Víme, že řada $\sum a_n x^n$ konverguje pro $x = -4$ a diverguje pro $x = 7$. Určete, zda jsou následující výroky pravdivé, nepravdivé nebo pravdivost nelze určit:

PRAVDA - LEŽ - NEVÍME Řada konverguje pro $x = 10$.

PRAVDA - LEŽ - NEVÍME Řada konverguje pro $x = 3$.

PRAVDA - LEŽ - NEVÍME Řada diverguje pro $x = 1$.

PRAVDA - LEŽ - NEVÍME Řada diverguje pro $x = 6$.

4. Najděte mocninnou řadu, která:
   (a) diverguje pro $x = 0$;
   (b) konverguje pro $x = 5$, ale nikde jinde;
   (c) má střed konvergence v 0, poloměr konvergence roven 2 a konverguje pro 2, ale diverguje pro -2.

(1e) Jak vypadá n-tý člen?
(1f) pro hranici: $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}$, $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$
(1g) Na hranici roztrhněte řadu na liché a sudé členy.
(1j) Na hranici otestuje nutnou podmínku konvergence (pomůže Taylor nebo L'Hospital).