Pokud $x \in (-\infty, -1]$, platí

$$(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n) = \operatorname{arctg}(|x|^n) \geq \operatorname{arctg} 1,$$

a proto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \infty.$$

Tedy $\mathcal{D}(f) = (-1, \infty)$.

Vyšetříme stejnoměrnou konvergenci na $[0, \infty)$. Položíme

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \quad g_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n), \quad x \in [0, \infty).$$

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, pro každé $x \in [0, \infty)$ je $\{g_n(x)\}$ monotónní a $|g_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$, $x \in [0, \infty)$. Dle Věty 12.3.6 daná řada konverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$.

Ukážeme nyní, že $\sum \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}$ nekonverguje stejnoměrně na žádném pravém okolí bodu -1. Předpokládejme pro spor, že řada konverguje stejnoměrně na nějakém intervalu $(-1, -1+\delta)$. Položme

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}, \quad x \in (-1, -1+\delta).$$

Jelikož

$$\lim_{x \to -1_+} f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\pi}{4\sqrt{n+1}} = a_N \in \mathbb{R},$$

dle Věty 12.1.7 existuje vlastní limita $\lim_{N\to\infty} a_N$. To je však zřejmá nepravda, a tedy náš předpoklad o stejnoměrné konvergenci byl chybný.

Ukážeme však, že řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[q, 0]$, kde $q \in (-1, 0)$. Pro $x \in [q, 0]$ totiž platí

$$\left| \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n)}{\sqrt{n+1}} \right| \leq \frac{\operatorname{arctg}(|x|^n)}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{|x|^n}{\sqrt{n+1}} \leq |q|^n.$$

Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |q|^n$ konvergentní, konverguje daná řada stejnoměrně na $[q, 0]$ dle Věty 12.3.3.

Řada tak konverguje lokálně stejnoměrně na $(-1, \infty)$, což zaručuje spojitost f na tomto intervalu, vizte Větu 12.1.8. ♣

1 **12.5.16. Příklad.** Spočtěte $f'(0)$, pokud

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1+\frac{x}{n})}{\sqrt{n}}.$$

Řešení. Označíme

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{\sin(1+\frac{x}{n})}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak
$$\left|f_n'(x)\right| = \left|(-1)^n \frac{\cos(1+\frac{x}{n})}{n\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
Tedy na každém intervalu tvaru $(-q,q)$, kde $q>0$, je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ dle Věty 12.3.3. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sin(1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje, jsou splněny předpoklady Věty ??. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $(-q,q)$ a navíc

O derivaci

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in (-q,q).$$

Tedy
$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
♣

12.5.17. Příklad. Určete definiční obor funkce
$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\operatorname{sign}(\cos x))^n (2\cos(x))^{2n}}{\sqrt{\log n}}, \quad x \in \mathbb{R},$$
a zjistěte, zda je na něm spojitá.

Řešení. Položme
$$f_n(x) = \frac{(\operatorname{sign}(\cos x))^n (2\cos(2x))^{2n}}{\sqrt{\log n}} = \left(\operatorname{sign}(\cos x)\right)^n \frac{\left(4\cos^2 x\right)^n}{\sqrt{\log n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Pokud $x \in \mathbb{R}$ splňuje $|\cos^x| < \frac{1}{2}$, tj. $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tak
$$|f_n(x)| \le \left(4\cos^2 x\right)^n,$$
a tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ konverguje absolutně. Pokud $|\cos^x| > \frac{1}{2}$, tj. $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tak $f_n(x) \not\to 0$, a tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ diverguje. Pokud $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pak $\cos x = \frac{1}{2}$ a $\operatorname{sign}\cos x = 1$, tedy
$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}}$$
diverguje. Pokud $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pak $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{sign}\cos x = -1$, a tedy
$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$$
konverguje dle Věty 3.3.1. Definiční obor f je tak
$$\mathcal{D}(f) = \left[\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)\right] + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Řada však nekonverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$, neboť pro libovolné $N \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$\sum_{n=N}^{2N} f_n(N) = \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1 + \frac{2N}{N^2+n^2}\right) \geq \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1 + \frac{2N}{N^2+(2N)^2}\right)$$
$$\geq N \log\left(1 + \frac{2}{5N}\right) \to \frac{2}{5}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku na $[0, \infty)$, takže daná řada zde nekonverguje stejnoměrně. ♣

12.5.19. Příklad. Nechť $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ jsou takové, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$$

konverguje. Ukažte, že pak řada konverguje stejnoměrně na $[x_0, \infty)$.

Řešení. Pro $x \in [x_0, \infty)$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \rightrightarrows$ a $\left\{\frac{1}{n^{x-x_0}}\right\}$ je monotónní omezená posloupnost, tvrzení plyne z Věty 12.3.6. ♣

2

12.5.20. Příklad. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou druhou derivaci na $(0, 2\pi)$.

Řešení. Zjevně platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Označme $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ a uvažujme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin nx}{n}.$$

Z odhadu $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ a Věty 12.3.3 plyne stejnoměrná konvergence řady derivací na $\mathbb{R}$. Z Příkladu **??** plyne lokálně stejnoměrná konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0, 2\pi)$. Z Věty **??** a 12.1.8 tak plyne spojitost $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ na $\mathbb{R}$ a spojitost $f'' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0, 2\pi)$. ♣

Řada a spojitost (minulé cvičo)

12.5.21. Příklad. Dokažte, že Riemannova funkce zeta

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

splňuje $\zeta \in C^{\infty}(1, \infty)$.

3

Příklad 2.14. Funkce $s(x)$ je dána vztahem

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{2^k} = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 3x}{8} + \dots .$$

Ukažme, že $s(x)$ je definovaná a spojitá pro všechna reálná x a vypočítejme její derivaci.

Řešení. Zřejmě platí

konvergence v $x_0=0$ automaticky

$$|f_k(x)| = \left| \frac{\sin kx}{2^k} \right| \le \left(\frac{1}{2} \right)^k, \qquad \underline{x \in (-\infty, \infty),} \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Majorantní číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konverguje, tedy podle Weierstrassova kritéria daná funkční řada konverguje stejnoměrně na celé reálné ose. Odtud také plyne spojitost $s(x)$ pro všechna reálná x.

Nyní prověříme, zda na $(-\infty, \infty)$ konverguje stejnoměrně také řada prvních derivací $f_k'(x)$. Vskutku,

fix interval $(-M, M)$

$$|f_k'(x)| = \left| \frac{k \cos kx}{2^k} \right| \le \underline{\frac{k}{2^k}}, \qquad x \in (-\infty, \infty), \quad k = 1, 2, \dots .$$

omezený

Konvergenci majorantní řady $\sum_{k=1}^{\infty} k/2^k$ ověříme snadno užitím limitního podílového kritéria. Tedy podle Weierstrassova kritéria řada prvních derivací konverguje stejnoměrně, a podle věty o derivování funkční řady existuje $s'(x)$ a platí

$$s'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{2^k} \right)' = \underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cos kx}{2^k}} = \frac{\cos x}{2} + \frac{2\cos 2x}{4} + \frac{3\cos 3x}{8} + \dots , \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Shrnutí poznatků o funkčních řadách

Sečtením nekonečně mnoha funkcí obdržíme opět funkci, která však nemusí být definována na definičním oboru jednotlivých sčítanců, ale obecně pouze na nějaké jeho podmnožině (ta se určí jako množina všech x, pro která daná řada konverguje; může se stát, že řada nekonverguje pro žádné x, pak součtová funkce není definována nikde). Základní věty matematické analýzy o spojitosti, derivaci a integraci součtu dvou (resp. konečně mnoha) funkcí nelze automaticky rozšířit na nekonečné součty. Ke splnění těchto vlastností je třeba vyžadovat silnější typ konvergence, tzv. stejnoměrnou konvergenci.

Řešení. Podle limitního podílového kritéria a užitím vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu platí

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\sin\frac{x}{2^{k+1}}|}{|\sin\frac{x}{2^k}|}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{|x|}{2^{k+1}}}{\sin 2\frac{|x|}{2^{k+1}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\cos\frac{|x|}{2^{k+1}}}=\frac{1}{2\cos 0}=\frac{1}{2}<1$$

pro všechna reálná x, tedy $I^*=(-\infty,\infty)$.

B. Vlastnosti funkčních řad

Příklad 2.6. Ukažte, že funkční řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{2^k}=\frac{\cos x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+\frac{\cos 3x}{8}+\dots$$

konverguje stejnoměrně pro všechna $x\in\mathbb{R}$.

Řešení. Zřejmě platí

$$|f_k(x)|=\left|\frac{\cos kx}{2^k}\right|\le\frac{1}{2^k}=:a_k\qquad\text{pro všechna } k=1,2,\dots \text{ a } x\in\mathbb{R}.$$

Majorantní řada $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ je konvergentní geometrická řada s kvocientem $q=\frac{1}{2}$, tedy podle Weierstrassova kritéria konverguje funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{2^k}$ stejnoměrně (a také absolutně) na celé reálné ose.

2b

Příklad 2.7. Funkce $s(x)$ je definována vztahem

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\mathrm{e}^{kx}}=\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{-2x}+3\mathrm{e}^{-3x}+\dots,\qquad x>0.$$

Ukažte, že $s(x)$ je definovaná a spojitá pro všechna $x>0$, a vypočtěte $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}s(x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Nejprve ukážeme, že daná funkční řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle\omega,\infty)$, kde $\omega>0$ je libovolné reálné číslo. Zřejmě

$$|f_k(x)|=\left|\frac{k}{\mathrm{e}^{kx}}\right|\le\frac{k}{\mathrm{e}^{k\omega}},\qquad x\in\langle\omega,\infty),\qquad k=1,2,\dots\ .$$

Majorantní číselná řada konverguje např. podle limitního odmocninového kritéria, neboť $\mathrm{e}^{\omega}>1$. Podle Weierstrassova kritéria proto daná řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle\omega,\infty)$, a součtová funkce $s(x)$ je spojitá pro všechna $x>0$. Stejnoměrná konvergence řady umožňuje navíc záměnu sumace a integrace, a platí tedy

Na $(\ln 2, \ln 3)$ máme o shod

$$ke^{-kx}\le\frac{k}{e^{k\ln 2}}=\frac{k}{2^k}$$

$$\begin{aligned}\int_{\ln 2}^{\ln 3}s(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}k\mathrm{e}^{-kx}\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3}k\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x=-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-kx}\right]_{\ln 2}^{\ln 3}\\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}(3^{-k}-2^{-k})=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Příklad 2.8. Rozhodněte o spojitosti funkce $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(1+kx)}{kx^k}$.

Příklad 14.3.11. (i) Máme

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Big) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^k}{k!} \, \mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Big]_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - 1 = [\mathrm{e}^x]_0^1.$$

Prohození sumy a integrálu nám umožnila stejnoměrná konvergence, která plyne z Diniho věty (Věta 14.3.6) nebo Weierstrassova kritéria (Věta 14.2.2).
(ii) Platí

43

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \Big) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{k!} \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{x^k}{k!k} \Big]_0^1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!k}.$$

Prohození sumy a integrálu se zdůvodní jako výše, jen v případě aplikace Diniho věty je nutné pracovat s funkcí $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ spojitě dodefinovanou v počátku hodnotou 1.

Poznámka 14.3.12. První část předchozího příkladu má jen pramalou hodnotu, neboť jsme použili zdlouhavý postup, třebaže integrand má dobře známou primitivní funkci. Druhá část je podstatně zajímavější, neboť naše techniky hledání primitivní funkce z první části skript neumožňují takovou úlohu řešit. Výsledek je však neuspokojivý tím, že řadu neumíme sečíst. Zde je ale vhodné poznamenat, že jsme přece jen nějaký pokrok udělali. Získaná řada se dá celkem pohodlně použít k numerickým aproximacím skutečné hodnoty integrálu (zkuste si rozmyslet, kolik členů je potřeba sečíst k dosažení přesnosti třeba $\frac{1}{1000}$).

Předchozí příklad se dal také řešit pomocí technik z teorie mocninných řad. Techniky v této kapitole jsou však univerzálnější, neboť v matematice nacházejí uplatnění i další typy funkčních řad.

Příklad 14.3.13. Zkusme naše metody použít na výpočet (Newtonova) integrálu

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \Big(\frac{x}{\mathrm{e}^x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathrm{e}^{-kx} \Big) \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x \mathrm{e}^{-kx} \Big) \, \mathrm{d}x.$$

K prohození sumy a integrálu potřebujeme stejnoměrnou konvergenci na omeze-

Řada však nekonverguje stejnoměrně na $[0,\infty)$, neboť pro libovolné $N \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$\sum_{n=N}^{2N} f_n(N) = \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1+\frac{2N}{N^2+n^2}\right) \geq \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1+\frac{2N}{N^2+(2N)^2}\right)$$
$$\geq N\log\left(1+\frac{2}{5N}\right) \to \frac{2}{5}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku na $[0,\infty)$, takže daná řada zde nekonverguje stejnoměrně. ♣

12.5.19. Příklad. Nechť $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ jsou takové, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$$

konverguje. Ukažte, že pak řada konverguje stejnoměrně na $[x_0,\infty)$.

Řešení. Pro $x \in [x_0,\infty)$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \rightrightarrows$ a $\left\{\frac{1}{n^{x-x_0}}\right\}$ je monotónní omezená posloupnost, tvrzení plyne z Věty 12.3.6. ♣

12.5.20. Příklad. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou druhou derivaci na $(0,2\pi)$.

Řešení. Zjevně platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Označme $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ a uvažujme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin nx}{n}.$$

Z odhadu $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ a Věty 12.3.3 plyne stejnoměrná konvergence řady derivací na $\mathbb{R}$. Z Příkladu **??** plyne lokálně stejnoměrná konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0,2\pi)$. Z Věty **??** a 12.1.8 tak plyne spojitost $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ na $\mathbb{R}$ a spojitost $f'' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0,2\pi)$. ♣

3 **12.5.21. Příklad.** Dokažte, že Riemannova funkce zeta

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

splňuje $\zeta \in C^{\infty}(1,\infty)$.

Řešení. Postupujeme indukcí. Nechť $q > 1$ je libovolné. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konverguje, a tedy z Příkladu 12.5.19 plyne stejnoměrná konvergence dané řady na $[q, \infty)$. Tedy ζ je spojitá na $(1, \infty)$.

Dokážeme nyní, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^k n}{n^x}, \quad x \in (1, \infty).$$

Pro $k = 0$ vzorec zjevně platí. Předpokládejme jeho platnost pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{k+1} n}{n^x}$$

fix interval $(1, M)$

konverguje lokálně stejnoměrně na $(1, \infty)$ (vizte Příklad 12.5.19), a tedy platí díky Větě ?? rovnost

$$\zeta^{(k+1)}(x) = \left(\zeta^k(x)\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \log^k n}{n^x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \log^{k+1} n}{n^x}.$$

Tedy ζ je třídy C^{∞} na $(1, \infty)$. ♣

12.5.22. Příklad. Zjistěte, kde jsou diferencovatelné funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

Řešení. (a) Označme

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n + x}, \quad g_n(x) = \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

Nechť $N = \{-n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Ukážeme, že

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

na každé množině tvaru $[-q, q] \setminus N$. Nechť tedy $q > 0$ je libovolné. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > q$. Pak pro $x \in [-q, q]$ a $n \ge n_0$ platí

$$\frac{1}{(n + x)^2} \le \frac{1}{(n - q)^2}.$$

Tedy máme

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{n^2}{(n + x)^2},$$

přičemž $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \rightrightarrows$, $\frac{n^2}{(n+x)^2} \le \frac{n^2}{(n-q)^2}$ a pro každé $x \in [-q, q]$ je posloupnost $\left\{\frac{n^2}{(n+x)^2}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ monotónní. (Vskutku,

$$\frac{n^2}{(n+x)^2} \ge \frac{(n+1)^2}{(n+1+x)^2}$$

právě tehdy, když

$$1 + \frac{1}{n+x} \ge 1 + \frac{1}{n}.$$

To však nastává právě tehdy, když $x \le 0$. Tedy daná posloupnost je nerostoucí, pokud $x \in [-q, 0]$, a neklesající, pokud $x \in [0, q]$.) Řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'$ tak konverguje stejnoměrně na $[-q, q]$. Protože původní řada konverguje v bodě $x = 0$, máme

$$\left(f(x) - \sum_{n=1}^{n_0-1} f_n(x)\right)' = \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in [-q, q] \setminus N.$$

Z toho však dostáváme

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in [-q, q] \setminus N.$$

Jelikož q bylo libovolné, je f diferencovatelná na $\mathbb{R} \setminus N$.

6

(b) Z odhadu $|g_n(x)| \le \frac{q}{n^2}$ platného pro $x \in [-q, q]$ vidíme, že řada definující g konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Máme

$$g_n'(x) = \operatorname{sign} x \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}, \ x \ne 0,$$

$$\frac{|n^2 - x^2|}{(n^2+x^2)^2} \le \frac{n^2+x^2}{(n^2)^2} \le \frac{n^2+q^2}{n^4}$$

a tedy pro interval $(0, q)$ platí

$$|g_n'(x)| \le \frac{\cancel{q}(n^2 + q^2)}{n^4}.$$

Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{q}(n^2+q^2)}{n^4}$ konveregentní, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n' \rightrightarrows$ na $(0, q)$. Tedy

$$g' = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'$$

na $(0, \infty)$. Obdobně odvodíme, že $g' = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'$ na $(-\infty, 0)$.

Ukážeme nyní, že $g'(0)$ neexistuje. Díky Větě 12.1.7 máme

Prohození limit Moore-Osgood

$$g_+'(0) = \lim_{h \to 0_+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + h^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

a obdobně $g_-'(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tedy $g'(0)$ neexistuje. ♣

7 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-x^2+6x-8)^n}_{f_n}$

(a) geom. řada, potřebujeme

$$-1 < -x^2+6x-8 < 1$$

$x^2-6x+7<0$ & $0 < x^2-6x+9$

$(x-(3+\sqrt2))(x-(3-\sqrt2))<0$ $0<(x-3)^2$

$x\in(3-\sqrt2,\ 3+\sqrt2)$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$

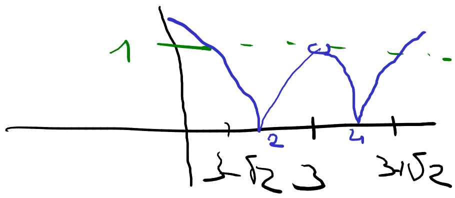
Dohromady $x\in(3-\sqrt2,\ 3)\cup(3,\ 3+\sqrt2)$

(b) pro $x_0 = \frac{7}{2} = 3{,}5$

potřebujeme f_n spoj. na U = okolí 3,5 ✓

$\sum f_n \rightrightarrows$ na U

Zvolme $U = (3{,}3\ ;\ 3{,}7)$



Weierstrass

$$\sigma_n = \sup_{x\in U} |f_n| = (0{,}91)^n$$

$\sum 0{,}91^n$ k (geom. Σ)

$\rightarrow$ $\sum f_n \rightrightarrows$ na U

$\rightarrow$ f je spoj. v $7/2$

(c) derivace

- f_n jsou dif na U ✓ (polynomy)
- $\sum f_n(4) = \sum 0$ k ✓
- $\sum f_n'$:

$$f_n'(x) = n(-x^2+6x-8)^{n-1} \cdot (-2x+6)$$

$$\sigma_n = |n(-x^2+6x-8)^{n-1} \cdot (-2x+6)| \leq$$

$$\leq |n \cdot (0{,}91)^{n-1} (-1{,}4)|$$

$\sum 1{,}4n \cdot (0{,}91)^{n-1}$ k (z d'Al, grow. $\sum$ převed $\sum n$)

$\rightarrow \sum f_n' \rightrightarrows$ na U

Pak $f'(\frac{7}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (\frac{3}{4})^{n-1} \cdot (-1)$