4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Záměna sumy a derivace)**.** Nechť (a,b) je omezený neprázdný interval a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí splňující:

1. f_n má vlastní derivaci na (a,b),
2. existuje $x_0 \in (a,b)$ takové $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje,
3. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje stejnoměrně na (a,b).

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na (a,b) a pro každé $x \in (a,b)$ platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Věta 2 (Záměna sumy a intagrálu)**.** Nechť (a,b) je omezený neprázdný interval a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí splňující:

1. $f_n \in \mathcal{N}(a,b)$
2. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně k funkci f na (a,b).

Pak $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (N)\int_a^b f_n = (N)\int_a^b f.$$

Příklady

1. Spočtěte $f'(0)$ (vyjádřete jako řadu):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}$$

2. Ukažte, že funkce f má první derivaci spojitou na $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

3. Spočtěte derivaci funkce (vyjádřete jako řadu):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

4. Spočtěte integrál (stačí vyjádřit jako řadu)

(a) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx}} \, \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} \, \mathrm{d}x$

5. Dokažte, že pro Riemannovu zeta funkci

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

platí $\zeta \in C^{\infty}(1, \infty)$.

6. Zjistěte, kde je diferencovatelná funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

Zkouškové příklady

7. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2 + 6x - 8)^n.$$

(a) Určete, pro která x je f definována.

(b) Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě $7/2$.

(c) Dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v bodě $7/2$ a vyjádřete $f'(7/2)$ jako součet číselné řady.

(4b) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$