1a

Řešení:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$. Zde jde o geometrickou řadu, a jak známo ta konverguje právě tehdy, když $x \in (-1,1)$. Z minulých cvičení víme, že posloupnost funkcí x^n nekonverguje k nule stejnoměrně, tedy dle nutné podmínky (Věta 1) víme, že konvergence zadané řady není stejnoměrná. Nicméně konvergence je lokálně stejnoměrná. Uvažujme interval $[-K,K]$ pro $K \in (0,1)$, a na něm vyšetřujme stejnoměrnou konvergenci řady. Počítejme
$$a_n = \sup_{x\in[-K,K]} \{|x^n|\} = K^n.$$
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (opět geometrická řada), a tedy (z Věty 2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \rightrightarrows$ na $[-K,K]$ a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na $(-1,1)$.
Z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ je na svém definičním oboru $(-1,1)$ spojitá.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2x^2+1}$. „Bodová" konvergence řady je jednoduchá. Pro $x = 1$ řada zjevně diverguje, a pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konverguje (třeba podle limitního srovnávacího kritéria s $\frac{1}{n^2}$). Stejnoměrná však tato konvergence opět není, zase není splněna nutná podmínka – Věta 3. Nějak (tady je to skoro vidět a lze si to tipnout, případně můžeme derivovat) zvolíme body $x_n = \frac{1}{n}$, respektive $x_n = -\frac{1}{n}$, potom $u_n(x_n) = \frac{1}{2}$, tedy konvergence není stejnoměrná na intervale $(0,\infty)$, respektive $(-\infty,0)$.
Vyšetřujme lokálně stejnoměrnou konvergenci na intervale $(0,\infty)$ (pro $(-\infty,0)$ by to bylo totéž). Mějme dán interval $[K,\infty)$ pro $K \in (0,\infty)$. Pak
$$a_n = \sup_{x\in[K,\infty)} \left\{ \frac{1}{n^n x^2 + 1} \right\} = \frac{1}{K^2n^2+1},$$
tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (třeba opět limitní srovnávací kritérium), takže (z Věty 2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na intervale $[K,\infty)$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na $(0,\infty)$ a ze symetrie i na $(-\infty,0)$.
Z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je na intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ spojitá.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$. Je-li $x = 0$, pak řada zjevně konverguje. Je-li $x < 0$, pak není splněna nutná podmínka konvergence $\lim\limits_{n\to\infty} x^2e^{-nx} = \infty$, a tedy řada diverguje. A je-li $x > 0$, pak jde o geometrickou řadu $x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$, která konverguje. Tedy zadaná řada konverguje na intervale $[0,\infty)$.
A dokonce jde i o konvergenci stejnoměrnou, což vyplyne z výpočtu:
$$a_n = \sup_{x\in[0,\infty)} \left\{ \left| \frac{x^2}{e^{nx}} \right| \right\}.$$
Hledáme extrém, zderivujeme a zjistíme, že na $\left[0, \frac{2}{n}\right]$ je funkce $\frac{x^2}{e^{nx}}$ rostoucí a na $\left[\frac{2}{n}, \infty\right]$ klesající. Tedy maximum je pro $x = \frac{2}{n}$, a
$$a_n = \frac{4}{n^2e^2}.$$

Nalezněme její maximum.

Pro $x \in (0, \infty)$ je $a_n'(x) = \frac{n(n^4-3x^2)}{2\sqrt{x}(n^4+x^2)^2}$, a tedy funkce a_n je rostoucí na $[0, n^2/\sqrt{3}]$ a klesající na $[n^2/\sqrt{3}, +\infty)$. Maximum má tedy v bodě $x_n = n^2/\sqrt{3}$. Dosazením zjistíme, že $a_n(x_n) = \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$. Protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$ konverguje (viz §45), konverguje naše řada stejnoměrně na $[0, +\infty)$ podle Weierstrassova kritéria. Je totiž $|a_n(x)| = a_n(x) \leq \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$ pro každé $x \in [0, \infty)$. ■

P ř í k l a d Na kterých intervalech je stejnoměrně konvergentní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$? Určete maximální intervaly, na kterých řada konverguje lokálně stejnoměrně.

Řešení. Nejprve vyšetřeme bodovou konvergenci. Dle §39 řada konverguje, právě když $x \in (-1, 1)$. Z příkladu v §85 už víme, že nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu tvaru $(1 - \varepsilon, 1)$. Stejně lze ukázat, že nekonverguje stejnoměrně na intervalech $(-1, -1 + \varepsilon)$ pro $\varepsilon > 0$, protože ani na těchto intervalech posloupnost funkcí x^n nekonverguje stejnoměrně k 0.

Dále uvažujme interval $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ pro $\varepsilon \in (0, 1)$. Je-li x z tohoto intervalu, pak $|x^n| \leq (1 - \varepsilon)^n$. Protože $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon)^n$ konverguje, podle Weierstrassova kritéria naše řada konverguje stejnoměrně na $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$.

Shrňme výsledky: Maximální množinou, kde řada konverguje bodově, je $(-1, 1)$; řada konverguje stejnoměrně na $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$, konvergence není stejnoměrná na $(1 - \varepsilon, 1)$ ani na $(-1, -1 + \varepsilon)$ pro žádné $\varepsilon > 0$. Protože podle předchozí věty pro každé $x \in (-1, 1)$ řada konverguje stejnoměrně na nějakém okolí x, řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(-1, 1)$. ■

P ř í k l a d Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-7}$?

Řešení. Všechny členy řady mají smysl pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Na podmnožinách této množiny je její konvergence (bodová, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná) ekvivalentní příslušnému typu konvergence řady $\sum\limits_{n=8}^{\infty} x^{n-7}$, což je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$. Z předchozího příkladu a §86 plyne, že řada konverguje stejnoměrně na intervalech $[-1+\varepsilon, 0)$ a $(0, 1 - \varepsilon]$ pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$, nikoli však na $(-1, -1 + \varepsilon)$ nebo na $(1 - \varepsilon, 1)$. ■

Weierstrassovo kritérium je postačující podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci, nikoli však podmínkou nutnou. A to ani pro řady s nezápornými členy. O tom svědčí i předchozí příklad – tam uvedená řada konverguje stejnoměrně například na $(0, 1/2)$. Nicméně prvních šest členů této řady tvoří funkce, které na $(0, 1/2)$ nejsou omezené, a tudíž předpoklady Weierstrassova kritéria nemohou být splněny. Weierstrassovo kritérium lze ovšem použít na řadu $\sum\limits_{n=8}^{\infty} x^{n-7}$, což bylo uděláno v před-

Řešení:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$. Zde jde o geometrickou řadu, a jak známo ta konverguje právě tehdy, když $x \in (-1, 1)$. Z minulých cvičení víme, že posloupnost funkcí x^n nekonverguje k nule stejnoměrně, tedy dle nutné podmínky (Věta 1) víme, že konvergence zadané řady není stejnoměrná. Nicméně konvergence je lokálně stejnoměrná. Uvažujme interval $[-K, K]$ pro $K \in (0, 1)$, a na něm vyšetřujme stejnoměrnou konvergenci řady. Počítejme
$$a_n = \sup_{x \in [-K,K]} \{|x^n|\} = K^n.$$
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (opět geometrická řada), a tedy (z Věty 2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \rightrightarrows$ na $[-K, K]$ a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na $(-1, 1)$.

   Z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ je na svém definičním oboru $(-1, 1)$ spojitá.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2x^2 + 1}$. „Bodová“ konvergence řady je jednoduchá. Pro $x = 1$ řada zjevně diverguje, a pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konverguje (třeba podle limitního srovnávacího kritéria s $\frac{1}{n^2}$). Stejnoměrná však tato konvergence opět není, zase není splněna nutná podmínka – Věta 3. Nějak (tady je to skoro vidět a lze si to tipnout, případně můžeme derivovat) zvolíme body $x_n = \frac{1}{n}$, respektive $x_n = -\frac{1}{n}$, potom $u_n(x_n) = \frac{1}{2}$, tedy konvergence není stejnoměrná na intervale $(0, \infty)$, respektive $(-\infty, 0)$.

   Vyšetřujme lokálně stejnoměrnou konvergenci na intervale $(0, \infty)$ (pro $(-\infty, 0)$ by to bylo totéž). Mějme dán interval $[K, \infty)$ pro $K \in (0, \infty)$. Pak
$$a_n = \sup_{x \in [K,\infty)} \left\{ \frac{1}{n^n x^2 + 1} \right\} = \frac{1}{K^2 n^2 + 1},$$
tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (třeba opět limitní srovnávací kritérium), takže (z Věty 2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na intervale $[K, \infty)$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na $(0, \infty)$ a ze symetrie i na $(-\infty, 0)$.

   Z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ spojitá.

1c

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$. Je-li $x = 0$, pak řada zjevně konverguje. Je-li $x < 0$, pak není splněna nutná podmínka konvergence $\lim\limits_{n\to\infty} x^2 e^{-nx} = \infty$, a tedy řada diverguje. A je-li $x > 0$, pak jde o geometrickou řadu $x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$, která konverguje. Tedy zadaná řada konverguje na intervale $[0, \infty)$.

   A dokonce jde i o konvergenci stejnoměrnou, což vyplyne z výpočtu:
$$a_n = \sup_{x \in [0,\infty)} \left\{ \left| \frac{x^2}{e^{nx}} \right| \right\}.$$
Hledáme extrém, zderivujeme a zjistíme, že na $\left[0, \frac{2}{n}\right]$ je funkce $\frac{x^2}{e^{nx}}$ rostoucí a na $\left[\frac{2}{n}, \infty\right]$ klesající. Tedy maximum je pro $x = \frac{2}{n}$, a
$$a_n = \frac{4}{n^2 e^2}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, a tedy (díky Větě 2) zadaná řada konverguje absolutně na $[0, \infty)$.

Z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je na intervale $[0, \infty)$ spojitá. (Je třeba si rozmyslet, že to platí i pro [polo)uzavřený interval].

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \dfrac{x^2}{n \log^2 n}\right)$. Nejprve je třeba si vzpomenout na známou nerovnost

$$\log(1 + y) \leq y.$$

Kdyby nás zajímal její důkaz, tak si stačí uvědomit, že

$$\int_1^{1+y} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \int_1^{1+y} \mathrm{d}t.$$

S tímto poznatkem již vidíme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n \log^2 n}.$$

Jelikož je napravo konvergentní řada (jednoduché použití kondenzačního kritéria), konverguje i zadaná řada pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Opět je vidět, že to nekonverguje stejnoměrně, neboť posloupnost $x_n = \sqrt{n \log^2 n}$ nasvědčuje, že není splněna nutná podmínka stejnoměrné konvergence – Věta 1. Vyšetřujme tedy lokálně stejnoměrnou konvergenci. Nechť máme zadán interval $[-K, K]$. Na něm počítejme

$$a_n = \sup_{x \in [-K,K]} \left\{ \left| \log\left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n}\right) \right| \right\} \leq \sup_{x \in [-K,K]} \left\{ \frac{x^2}{n \log^2 n} \right\} = \frac{K^2}{n \log^2 n},$$

tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (opět kondenzační kritérium), a tedy díky Větě 2 platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na $[-K, K]$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$.

A z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je na $\mathbb{R}$ spojitá.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\dfrac{2x}{x^2 + n^3}\right)$. Zde to konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$, tedy je tam i spojitá.

Derivací zjistíme, že $a_n = u_n(\sqrt{n^3})$. A $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2n^{\frac{3}{2}}}{2n^3}\right)$ konverguje (pro $y > 0$ je $\arctan(y) \leq y$).

1d

Příklad 13.8. Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \text{kde} \quad f_k(x) := x^k e^{-kx} \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{39}$$

diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}_-$, konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}_+^0$. Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f_k'(x) = kx^{k-1}(1-x)$, protože se tato derivace v $\mathbb{R}_+$ rovná 0, právě když je $x = 1$, a protože $f_k(0) = f_k(+\infty-) = 0$, $f_k(1) = e^{-k}$, nabývá nezáporná funkce $f_k | \mathbb{R}_+^0$ v bodě 1 svého maxima. (Sr. s V.8.2.)

Konvergentní řada $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ je tedy majorantou v $\mathbb{R}_+^0$ řady (39), která tam proto podle srovnávacího kritéria konverguje stejnoměrně.

Příklad 13.9°. Porovnejme stejnoměrnost konvergence řad o členech

$$f_k(x) := \frac{x}{1+k^2x^2} \quad \text{a} \quad g_k(x) := \frac{x^2}{1+k^2x^2}\,, \tag{40}$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(0)$ jsou nulové, tedy konvergentní; je-li $x \neq 0$, je

$$|f_k(x)| \leq \frac{|x|}{k^2x^2} = \frac{1}{k^2|x|} \quad \text{a} \quad 0 \leq g_k(x) \leq \frac{x^2}{k^2x^2} \leq \frac{1}{k^2}\,. \tag{41}$$

Z toho plyne, že

$$\textit{řada } \sum_{k=1}^{\infty} f_k \textit{ konverguje v } \mathbb{R} \textit{ bodově, řada } \sum_{k=1}^{\infty} g_k \textit{ stejnoměrně.} \tag{42}$$

Z prvního odhadu je zároveň patrné, že $|x| \geq \delta > 0 \Rightarrow |f_k(x)| \leq 1/k^2\delta$, takže (podle V.13.13)

$$\textit{řada } \sum_{k=1}^{\infty} f_k \textit{ konverguje stejnoměrně v } \mathbb{R} - U(0,\delta) \textit{ pro každé } \delta \in \mathbb{R}_+\,. \tag{42}$$

Ukažme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \textit{ nekonverguje stejnoměrně v žádném } P^+(0) \textit{ a v žádném } P^-(0)\,; \tag{43}$$

vzhledem k lichosti funkcí f_k stačí nestejnoměrnost konvergence dokázat jen pro intervaly tvaru $(0,\delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}_+$. K tomu stačí ověřit *neplatnost* příslušné BC podmínky, tj. *platnost* její negace, která zní:

(44) *Existuje* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *tak, že pro každé* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $n > n_0$, $p \in \mathbb{N}$ *a* $x \in (0,\delta)$ *tak, že* $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \geq \varepsilon$.

V našem případě však platí dokonce toto silnější a konkrétnější tvrzení:

<u>Příklad</u> Řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ nekonverguje stejnoměrně na $[0,1]$, neboť po dosazení $x=1$ řada diverguje.

Poznámka. Vyšetřování bodové konvergence řad funkcí je vlastně zkoumáním konvergence číselné řady s parametrem. Proto se v případě potřeby budeme na řadu funkcí dívat jako na řadu s parametrem. A mluvíme-li o konvergenci řady funkcí na množině, myslíme samozřejmě bodovou konvergenci.

§85. To, že řada nekonverguje stejnoměrně, lze někdy dokázat s použitím následující **nutné podmínky pro stejnoměrnou konvergenci**.

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *konverguje (lokálně) stejnoměrně na množině* M*, pak funkce* $a_n(x)$ *na* M *konvergují (lokálně) stejnoměrně k* 0.

<u>Příklad</u> Konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ stejnoměrně na intervalu $(0,1)$?

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce x^n na $(0,1)$ rostoucí a v bodě 1 zleva má limitu 1, je tedy $\sup_{x\in(0,1)} x^n = 1$. Proto funkce x^n nekonvergují k 0 stejnoměrně na $(0,1)$. Tudíž naše řada nekonverguje stejnoměrně. ■

Stejným způsobem lze ukázat, že řada z předchozího příkladu nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu tvaru $(1-\varepsilon, 1)$ pro $\varepsilon \in (0,1)$.

§86. Někdy může být užitečný následující triviální postřeh.

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *je řada funkcí na množině* M *a* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *konverguje (lokálně) stejnoměrně na* M*, právě když (lokálně) stejnoměrně na* M *konverguje řada* $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(x)$.

Tento postřeh sám o sobě příliš aplikací nemá, jeho důležitost spočívá v kombinaci s jinými kritérii. Často totiž stačí, aby předpoklady kritéria byly splněny „od jistého n_0 počínaje".

§87. Jednoduchou postačující podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci řad je **Weierstrassovo kritérium**.

Jestliže (číselná) řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje a pro každé* $x \in M$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|a_n(x)| \le b_n$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* M.

1e <u>Příklad</u> Zkoumejte stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4+x^2}$ na $[0,+\infty)$.

Řešení. Označme $a_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{n^4+x^2}$. Funkce a_n je spojitá a nezáporná na $[0,+\infty)$.

Nalezněme její maximum.

Pro $x \in (0, \infty)$ je $a_n'(x) = \frac{n(n^4-3x^2)}{2\sqrt{x}(n^4+x^2)^2}$, a tedy funkce a_n je rostoucí na $[0, n^2/\sqrt{3}]$ a klesající na $[n^2/\sqrt{3}, +\infty)$. Maximum má tedy v bodě $x_n = n^2/\sqrt{3}$. Dosazením zjistíme, že $a_n(x_n) = \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$ konverguje (viz §45), konverguje naše řada stejnoměrně na $[0, +\infty)$ podle Weierstrassova kritéria. Je totiž $|a_n(x)| = a_n(x) \leq \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$ pro každé $x \in [0, \infty)$. ■

<u>P ř í k l a d</u> Na kterých intervalech je stejnoměrně konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$? Určete maximální intervaly, na kterých řada konverguje lokálně stejnoměrně.

Řešení. Nejprve vyšetřeme bodovou konvergenci. Dle §39 řada konverguje, právě když $x \in (-1, 1)$. Z příkladu v §85 už víme, že nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu tvaru $(1 - \varepsilon, 1)$. Stejně lze ukázat, že nekonverguje stejnoměrně na intervalech $(-1, -1 + \varepsilon)$ pro $\varepsilon > 0$, protože ani na těchto intervalech posloupnost funkcí x^n nekonverguje stejnoměrně k 0.

Dále uvažujme interval $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ pro $\varepsilon \in (0, 1)$. Je-li x z tohoto intervalu, pak $|x^n| \leq (1 - \varepsilon)^n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon)^n$ konverguje, podle Weierstrassova kritéria naše řada konverguje stejnoměrně na $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$.

Shrňme výsledky: Maximální množinou, kde řada konverguje bodově, je $(-1, 1)$; řada konverguje stejnoměrně na $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$, konvergence není stejnoměrná na $(1 - \varepsilon, 1)$ ani na $(-1, -1 + \varepsilon)$ pro žádné $\varepsilon > 0$. Protože podle předchozí věty pro každé $x \in (-1, 1)$ řada konverguje stejnoměrně na nějakém okolí x, řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(-1, 1)$. ■

<u>P ř í k l a d</u> Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-7}$?

Řešení. Všechny členy řady mají smysl pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Na podmnožinách této množiny je její konvergence (bodová, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná) ekvivalentní příslušnému typu konvergence řady $\sum_{n=8}^{\infty} x^{n-7}$, což je řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Z předchozího příkladu a §86 plyne, že řada konverguje stejnoměrně na intervalech $[-1+\varepsilon, 0)$ a $(0, 1 - \varepsilon]$ pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$, nikoli však na $(-1, -1 + \varepsilon)$ nebo na $(1 - \varepsilon, 1)$. ■

Weierstrassovo kritérium je postačující podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci, nikoli však podmínkou nutnou. A to ani pro řady s nezápornými členy. O tom svědčí i předchozí příklad – tam uvedená řada konverguje stejnoměrně například na $(0, 1/2)$. Nicméně prvních šest členů této řady tvoří funkce, které na $(0, 1/2)$ nejsou omezené, a tudíž předpoklady Weierstrassova kritéria nemohou být splněny. Weierstrassovo kritérium lze ovšem použít na řadu $\sum_{n=8}^{\infty} x^{n-7}$, což bylo uděláno v před-

Dle Věty2.2.46 platí

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0,3], \\ x, & x \in (3,\infty). \end{cases}$$

Jelikož

$$(f_n - f)'(x) = \frac{1}{n}(x^n + 3^n)^{\frac{1}{n}-1} n x^{n-1} > 0, \quad x \in (0,3),$$

je $f_n - f$ nezáporná a rostoucí na $[0,3]$. Tedy

$$\sup_{x\in[0,3]} |f_n(x) - f(x)| \le \sqrt[n]{23^n} - 3 = 3\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \to 0,$$

což znamená, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,3]$.

Na intervalu $[3,\infty)$ platí

$$(f_n - f)'(x) = \frac{1}{n}(x^n + 3^n)^{\frac{1}{n}-1} n x^{n-1} - 1 < 0, \quad x \in (3,\infty),$$

a tedy je $f_n - f$ klesající na $[3,\infty)$. Zjevně je $f_n - f > 0$, a proto

$$\sup_{x\in[3,\infty]} |f_n(x) - f(x)| \le \sqrt[n]{23^n} - 3 = 3\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \to 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ i na $[3,\infty)$. Proto $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,\infty)$. ♣

12

12.5.12. Příklad. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$ lichá a v nekonečnu má limitu 0. Jelikož

$$f_n'(x) = \frac{n}{(1+n^5x^2)^2}\left(1 - n^5x^2\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

Má funkce v bodě $-\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ minimum a v bodě $\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ maximum. V absolutní hodnotě lze tak funkci f_n odhadnout číslem $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konverguje, zadaná řada konverguje stejnoměrně dle Věty 12.3.3. ♣

12.5.13. Příklad. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n\log^2 n}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Příklad 13.8. Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,, \quad \text{kde} \quad f_k(x) := x^k e^{-kx} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}, \tag{39}$$

diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}_-$, konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}_+^0$. Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f_k'(x) = kx^{k-1}(1-x)$, protože se tato derivace v $\mathbb{R}_+$ rovná 0, právě když je $x = 1$, a protože $f_k(0) = f_k(+\infty-) = 0$, $f_k(1) = e^{-k}$, nabývá nezáporná funkce $f_k\,|\,\mathbb{R}_+^0$ v bodě 1 svého maxima. (Sr. s V.8.2.)

Konvergentní řada $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ je tedy majorantou v $\mathbb{R}_+^0$ řady (39), která tam proto podle srovnávacího kritéria konverguje stejnoměrně.

Příklad 13.9°. Porovnejme stejnoměrnost konvergence řad o členech

$$f_k(x) := \frac{x}{1+k^2x^2} \quad \text{a} \quad g_k(x) := \frac{x^2}{1+k^2x^2}\,, \tag{40}$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(0)$ jsou nulové, tedy konvergentní; je-li $x \neq 0$, je

$$|\,f_k(x)\,| \le \frac{|\,x\,|}{k^2x^2} = \frac{1}{k^2|\,x\,|} \quad \text{a} \quad 0 \le g_k(x) \le \frac{x^2}{k^2x^2} \le \frac{1}{k^2}\,. \tag{41}$$

Z toho plyne, že

$$\text{řada } \sum_{k=1}^{\infty} f_k \ \textit{konverguje v } \mathbb{R} \textit{ bodově, řada } \sum_{k=1}^{\infty} g_k \ \textit{stejnoměrně.} \tag{42}$$

Z prvního odhadu je zároveň patrné, že $|\,x\,| \ge \delta > 0 \;\Rightarrow\; |\,f_k(x)\,| \le 1/k^2\delta$, takže (podle V.13.13)

$$\text{řada } \sum_{k=1}^{\infty} f_k \ \textit{konverguje stejnoměrně v } \mathbb{R} - U(0,\delta) \textit{ pro každé } \delta \in \mathbb{R}_+\,. \tag{42}$$

Ukažme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \ \textit{nekonverguje stejnoměrně v žádném } P^+(0) \textit{ a v žádném } P^-(0)\,; \tag{43}$$

vzhledem k lichosti funkcí f_k stačí nestejnoměrnost konvergence dokázat jen pro intervaly tvaru $(0,\delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}_+$. K tomu stačí ověřit *neplatnost* příslušné BC podmínky, tj. *platnost* její negace, která zní:

(44) *Existuje* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *tak, že pro každé* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $n > n_0$, $p \in \mathbb{N}$ *a* $x \in (0,\delta)$ *tak, že* $|\,\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\,| \ge \varepsilon$.

V našem případě však platí dokonce toto silnější a konkrétnější tvrzení:

Řešení:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$. Zde jde o geometrickou řadu, a jak známo ta konverguje právě tehdy, když $x \in (-1, 1)$. Z minulých cvičení víme, že posloupnost funkcí x^n nekonverguje k nule stejnoměrně, tedy dle nutné podmínky (Věta 1) víme, že konvergence zadané řady není stejnoměrná. Nicméně konvergence je lokálně stejnoměrná. Uvažujme interval $[-K, K]$ pro $K \in (0, 1)$, a na něm vyšetřujme stejnoměrnou konvergenci řady. Počítejme

$$a_n = \sup_{x \in [-K,K]} \{|x^n|\} = K^n.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (opět geometrická řada), a tedy (z Věty 2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \rightrightarrows$ na $[-K, K]$ a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na $(-1, 1)$.

Z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ je na svém definičním oboru $(-1, 1)$ spojitá.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2x^2 + 1}$. „Bodová“ konvergence řady je jednoduchá. Pro $x = \cancel{1}$ 0 řada zjevně diverguje, a pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konverguje (třeba podle limitního srovnávacího kritéria s $\frac{1}{n^2}$). Stejnoměrná však tato konvergence opět není, zase není splněna nutná podmínka – Věta 3. Nějak (tady je to skoro vidět a lze si to tipnout, případně můžeme derivovat) zvolíme body $x_n = \frac{1}{n}$, respektive $x_n = -\frac{1}{n}$, potom $u_n(x_n) = \frac{1}{2}$, tedy konvergence není stejnoměrná na intervale $(0, \infty)$, respektive $(-\infty, 0)$.

Vyšetřujme lokálně stejnoměrnou konvergenci na intervale $(0, \infty)$ (pro $(-\infty, 0)$ by to bylo totéž). Mějme dán interval $[K, \infty)$ pro $K \in (0, \infty)$. Pak

$$a_n = \sup_{x \in [K, \infty)} \left\{ \frac{1}{n^n x^2 + 1} \right\} = \frac{1}{K^2 n^2 + 1},$$

tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (třeba opět limitní srovnávací kritérium), takže (z Věty 2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na intervale $[K, \infty)$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na $(0, \infty)$ a ze symetrie i na $(-\infty, 0)$.

Z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ spojitá.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$. Je-li $x = 0$, pak řada zjevně konverguje. Je-li $x < 0$, pak není splněna nutná podmínka konvergence $\lim\limits_{n\to\infty} x^2 e^{-nx} = \infty$, a tedy řada diverguje. A je-li $x > 0$, pak jde o geometrickou řadu $x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$, která konverguje. Tedy zadaná řada konverguje na intervale $[0, \infty)$.

A dokonce jde i o konvergenci stejnoměrnou, což vyplyne z výpočtu:

$$a_n = \sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \left| \frac{x^2}{e^{nx}} \right| \right\}.$$

Hledáme extrém, zderivujeme a zjistíme, že na $\left[0, \frac{2}{n}\right]$ je funkce $\frac{x^2}{e^{nx}}$ rostoucí a na $\left[\frac{2}{n}, \infty\right]$ klesající. Tedy maximum je pro $x = \frac{2}{n}$, a

$$a_n = \frac{4}{n^2 e^2}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, a tedy (díky Větě 2) zadaná řada konverguje absolutně na $[0, \infty)$.

Z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je na intervale $[0, \infty)$ spojitá. (Je třeba si rozmyslet, že to platí i pro [polo)uzavřený interval].

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n}\right)$. Nejprve je třeba si vzpomenout na známou nerovnost

$$\log(1 + y) \leq y.$$

Kdyby nás zajímal její důkaz, tak si stačí uvědomit, že

$$\int_1^{1+y} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^{1+y} \mathrm{d}t.$$

S tímto poznatkem již vidíme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n \log^2 n}.$$

Jelikož je napravo konvergentní řada (jednoduché použití kondenzačního kritéria), konverguje i zadaná řada pro každé $x \in \mathbb{R}$.

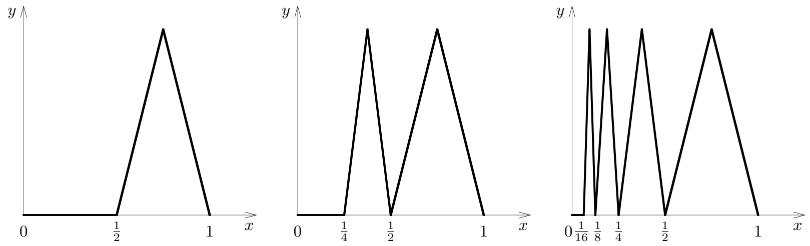
Opět je vidět, že to nekonverguje stejnoměrně, neboť posloupnost $x_n = \sqrt{n \log^2 n}$ nasvědčuje, že není splněna nutná podmínka stejnoměrné konvergence – Věta 1. Vyšetřujme tedy lokálně stejnoměrnou konvergenci. Nechť máme zadán interval $[-K, K]$. Na něm počítejme

$$a_n = \sup_{x \in [-K,K]} \left\{ \left| \log\left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n}\right) \right| \right\} \leq \sup_{x \in [-K,K]} \left\{ \frac{x^2}{n \log^2 n} \right\} = \frac{K^2}{n \log^2 n},$$

tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (opět kondenzační kritérium), a tedy díky Větě 2 platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na $[-K, K]$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$.

A z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je na $\mathbb{R}$ spojitá.

1, 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2 + n^3}\right)$. Zde to konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$, tedy je tam i spojitá. Derivací zjistíme, že $a_n = u_n(\sqrt{n^3})$. A $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2n^{\frac{3}{2}}}{2n^3}\right)$ konverguje (pro $y > 0$ je $\arctan(y) \leq y$).



Obr. 14. 1.

Funkce g_n jsou spojité a tvoří neklesající posloupnost funkcí z $\mathcal{C}([\,0,1\,])$, která konverguje k funkci g (jde o součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$). Řada zřejmě bodově konverguje, neboť v každém bodě je nenulová maximálně jedna z funkcí f_n. Řada však zřejmě nekonverguje stejnoměrně na intervalu $[\,0,1\,]$. Podle Věty 14.3.3 nemůže být g spojitá funkce (je nespojitá právě v bodě 0). Funkce g je sice spojitá na intervalu (0, 1], to však není kompaktní množina. Odtud vidíme, že předpoklady spojitosti limitní funkce a také kompaktnosti intervalu v Diniho Větě 14.3.3 jsou podstatné.

Následující tvrzení pro řady je velmi užitečné; v literatuře bývá označováno často jako *Weierstrassův M-test* nebo *majorantní kritérium*. Jak snadno nahlédneme, jde o *postačující podmínku* pro stejnoměrnou konvergenci řady funkcí.

Věta 14.3.5 (o majorantní řadě). *Nechť* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *je řada funkcí definovaných na množině* A *a nechť pro (skoro všechna)* $k \in \mathbb{N}$ *je* $\sup\{|f_k(t)|;\, t \in A\} \le \alpha_k$. *Jestliže* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$, *potom řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *konverguje stejnoměrně na* A.

Důkaz. Pro částečné součty s_n řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ snadno dostaneme při $m > n$ odhad

$$\sup\{|s_m(t) - s_n(t)|;\, t \in A\} \le \alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_m\,; \tag{14.6}$$

protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ konverguje, existuje k číslu $\varepsilon > 0$ takové $k \in \mathbb{N}$, pro které je součet na pravé straně nerovnosti (14.6) pro jakákoli $m > n \ge k$ odhadnut shora číslem ε. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ tedy splňuje podmínku z Věty 14.1.3, z čehož již tvrzení věty vyplývá. $\square$

Příklad 14.3.6 (Riemann *1861). Definujeme-li funkci g jako součet řady

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{14.7}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\left|\frac{\sin(k^2 x)}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}$$

a řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ konverguje. Podle Věty 14.3.5 konverguje proto řada v (14.7) stejnoměrně. Proto je funkce g spojitá na $\mathbb{R}$.

Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m \geq n \geq n_0$ a pro každé $x \in M$ platí

$$\left|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{m} \sigma_j < \varepsilon.$$

Ověřili jsme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Řada je tedy konvergentní podle Poznámky 12.3.2(a). ■

12.3.4. Příklad. Nechť $\alpha > 1$. Dokažte, že řady

12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$$

jsou stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\cos(nx)|}{n^\alpha}.$$

Potom

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty},$$

a tedy je řada konvergentní podle Weierstrassova kritéria. Důkaz stejnoměrné konvergence druhé řady je možné provést obdobně. ♣

12.3.5. Poznámka. Weierstrassovo kritérium nedává odpověď na otázku, zda jsou řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$$

stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$ pro $\alpha \in (0, 1]$.

12.3.6. Věta (Abelovo kritérium stejnoměrné konvergence)**.** Nechť M je množina, $f_n : M \to \mathbb{R}$, $g_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť platí

(i) pro každé $x \in M$ je posloupnost reálných čísel $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní (libovolným způsobem),

(ii) $\{g_n\}$ je posloupnost stejně omezených funkcí, tj.

$$\exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in M : |g_n(x)| \leq K,$$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows \quad \text{na } M.$$

Dle Věty2.2.46 platí

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0,3], \\ x, & x \in (3,\infty). \end{cases}$$

Jelikož

$$(f_n - f)'(x) = \frac{1}{n}(x^n + 3^n)^{\frac{1}{n}-1} n x^{n-1} > 0, \quad x \in (0,3),$$

je $f_n - f$ nezáporná a rostoucí na $[0,3]$. Tedy

$$\sup_{x\in[0,3]} |f_n(x) - f(x)| \le \sqrt[n]{23^n} - 3 = 3\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \to 0,$$

což znamená, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,3]$.

Na intervalu $[3,\infty)$ platí

$$(f_n - f)'(x) = \frac{1}{n}(x^n + 3^n)^{\frac{1}{n}-1} n x^{n-1} - 1 < 0, \quad x \in (3,\infty),$$

a tedy je $f_n - f$ klesající na $[3,\infty)$. Zjevně je $f_n - f > 0$, a proto

$$\sup_{x\in[3,\infty]} |f_n(x) - f(x)| \le \sqrt[n]{23^n} - 3 = 3\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \to 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ i na $[3,\infty)$. Proto $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,\infty)$. ♣

12.5.12. Příklad. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$ lichá a v nekonečnu má limitu 0. Jelikož

$$f_n'(x) = \frac{n}{(1+n^5x^2)^2}\left(1 - n^5x^2\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

Má funkce v bodě $-\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ minimum a v bodě $\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ maximum. V absolutní hodnotě lze tak funkci f_n odhadnout číslem $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konverguje, zadaná řada konverguje stejnoměrně dle Věty 12.3.3. ♣

1e

12.5.13. Příklad. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n\log^2 n}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Jelikož $\log(1+t) \le t$, $t \in (-1,\infty)$, a řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n}$ konverguje, konverguje bodově i zadaná řada. Protože však

$$\lim_{x\to\infty} \log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right) = \infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

nekonvergují členy řady stejnoměrně k 0. Proto daná řada nekonverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ dle Poznámky 12.3.2.

Uvažujme nyní libovolný interval $[-q,q]$, kde $q>0$. Pak

$$\sup_{x\in[-q,q]} \log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right) \le \frac{q^2}{n\log^2 n},$$

a tedy dle Věty 12.3.3 řada konverguje stejnoměrně na $[-q,q]$. ♣

12.5.14. Příklad. Ukažte, že řada

$$\sum_{n=+}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

nekonverguje stejnoměrně na $(0,\pi)$.

Řešení. Použijeme Poznámku 12.3.2(a), tj. ukážeme, že daná řada na $(0,\pi)$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Uvažujme libovolné $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned}\sup_{x\in(0,\pi)} \left|\sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin kx}{k}\right| &\ge \sum_{k=n}^{2} n\frac{\sin(\frac{k}{2n})}{2n}\\ &\ge \frac{\sin(\frac{n}{2n})}{2n}\sum_{k=n}^{2n} 1 \ge \frac{\sin\frac{1}{2}}{2} \nrightarrow 0.\end{aligned}$$

Tedy řada nekonverguje stejnoměrně na $(0,\pi)$. ♣

12.5.15. Příklad. Zjistěte, zda je funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}$$

spojitá na svém definičním oboru.

Řešení. Vyzkoumejme nejprve, pro jaké $x \in \mathbb{R}$ je řada konvergentní. Nechť nejprve $x \in [0,\infty)$. Položíme-li $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ a $b_n = \operatorname{arctg}(x^n)$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní (Věta 3.3.1) a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a monotónní (neklesající pro $x \ge 1$ a nerostoucí pro $x \in [0,1]$). Dle Věty 3.3.5 tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. Pokud $x \in (-1,0)$, máme

$$(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n) = \operatorname{arctg}(|x|^n) \le |x|^n,$$

a tedy řada konverguje dle Věty 3.2.2.

Příklad 13.8. Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \text{kde} \quad f_k(x) := x^k e^{-kx} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}, \tag{39}$$

diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}_-$, konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}_+^0$. Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f_k'(x) = kx^{k-1}(1-x)$, protože se tato derivace v $\mathbb{R}_+$ rovná 0, právě když je $x = 1$, a protože $f_k(0) = f_k(+\infty-) = 0$, $f_k(1) = e^{-k}$, nabývá nezáporná funkce $f_k|\mathbb{R}_+^0$ v bodě 1 svého maxima. (Sr. s V.8.2.)

Konvergentní řada $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ je tedy majorantou v $\mathbb{R}_+^0$ řady (39), která tam proto podle srovnávacího kritéria konverguje stejnoměrně.

2e **Příklad 13.9°.** Porovnejme stejnoměrnost konvergence řad o členech

$$f_k(x) := \frac{x}{1+k^2x^2} \quad \text{a} \quad g_k(x) := \frac{x^2}{1+k^2x^2}, \tag{40}$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(0)$ jsou nulové, tedy konvergentní; je-li $x \neq 0$, je

$$|f_k(x)| \leq \frac{|x|}{k^2x^2} = \frac{1}{k^2|x|} \quad \text{a} \quad 0 \leq g_k(x) \leq \frac{x^2}{k^2x^2} \leq \frac{1}{k^2}. \tag{41}$$

Z toho plyne, že

$$\text{řada } \sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ konverguje v } \mathbb{R} \text{ bodově, řada } \sum_{k=1}^{\infty} g_k \text{ stejnoměrně.} \tag{42}$$

Z prvního odhadu je zároveň patrné, že $|x| \geq \delta > 0 \Rightarrow |f_k(x)| \leq 1/k^2\delta$, takže (podle V.13.13)

$$\text{řada } \sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ konverguje stejnoměrně v } \mathbb{R} - U(0,\delta) \text{ pro každé } \delta \in \mathbb{R}_+. \tag{42}$$

Ukažme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ nekonverguje stejnoměrně v žádném } P^+(0) \text{ a v žádném } P^-(0); \tag{43}$$

vzhledem k lichosti funkcí f_k stačí nestejnoměrnost konvergence dokázat jen pro intervaly tvaru $(0,\delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}_+$. K tomu stačí ověřit *neplatnost* příslušné BC podmínky, tj. *platnost* její negace, která zní:

(44) *Existuje* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *tak, že pro každé* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $n > n_0$, $p \in \mathbb{N}$ *a* $x \in (0,\delta)$ *tak, že* $|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| \geq \varepsilon$.

V našem případě však platí dokonce toto silnější a konkrétnější tvrzení:

(45) $$n > \frac{1}{2\delta} \Rightarrow \frac{1}{2n} \in (0,\delta)\,, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} f_k\Big(\frac{1}{2n}\Big) \geq \frac{1}{4}\,.$$

Z nerovnosti $k \leq 2n$ totiž plyne, že $k/2n \leq 1$, takže $1 + (k/2n)^2 \leq 2$ a

$$f_k\Big(\frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{2n\,(1 + (k/2n)^2)} \geq \frac{1}{4n}\,.$$

Résumé. Přes podobnost funkcí (40) se obory stejnoměrné konvergence příslušných řad podstatně liší: *Druhá řada konverguje stejnoměrně v* $\mathbb{R}$, *první konverguje stejnoměrně v intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, *právě když není* $0 \in \overline{I}$, *takže její konvergence je lokálně stejnoměrná v* $\mathbb{R} - \{0\}$ *a nestejnoměrná v každém* $P^+(0)$ *i v každém* $P^-(0)$.

Podstatný rozdíl v chování obou řad způsobil faktor x, kterým se $g_k(x)$ liší od $f_k(x)$ a který podstatně zmenšil hodnoty funkcí $g_k(x)$ v blízkosti počátku.

Poznámka 13.8. Jsou-li splněny předpoklady srovnávacího kritéria (V.13.13), konvergují obě řady $\sum_{k=1}^\infty f_k$, $\sum_{k=1}^\infty |\,f_k\,|$ stejnoměrně; někdy se v takové situaci říká, že řada $\sum_{k=1}^\infty f_k$ konverguje **absolutně stejnoměrně**. Poznamenejme, že v tvrzení V.13.13 by stačilo uvést, že stejnoměrně konverguje řada $\sum_{k=1}^\infty |\,f_k\,|$, protože stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{k=1}^\infty f_k$ pak již zaručuje BC kritérium.

Stejnoměrně konvergující řadu, pro niž řada příslušných absolutních hodnot diverguje, lze sestrojit velmi snadno. Čtenář, který by nebyl spokojen s neabsolutně konvergentní řadou o členech $f_k := (-1)^k/k$ (ačkoli je to zcela právoplatný příklad, protože konvergentní řady s konstantními členy nejsou „zakázány“ a konvergují samozřejmě stejnoměrně), může vyšetřit např. řadu

$$\sum_{k=1}^\infty (-1)^k g_k(x)\,, \quad \text{kde } \; g_k(x) := \frac{\operatorname{arctg}(1 + k^2x^2)}{k}\,,$$

která podle Abelova kritéria konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$, zatímco řada $\sum_{k=1}^\infty g_k$ příslušných absolutních hodnot všude v $\mathbb{R}$ diverguje, protože pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $g_k(x) \geq g_k(0) \geq \pi/4k$.

Může se však stát, že řada $\sum_{k=1}^\infty f_k$ na nějaké množině X *konverguje absolutně i stejnoměrně*, *nikoli však absolutně stejnoměrně*; ukazuje to tento příklad:

Buďte f_k funkce z Př. 13.9, položme

(46) $$h_{2k-1} := f_k\,, \quad h_{2k} := -f_k \; \text{ pro každé } \; k \in \mathbb{N}$$

a s_n resp. σ_n nechť je n-tý částečný součet řady $\sum_{k=1}^\infty h_k$ resp. $\sum_{k=1}^\infty |\,h_k\,|$. Je zřejmé, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pak

(47) $$s_{2n-1}(x) = f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}\,, \quad s_{2n} \equiv 0\,,$$

a protože nerovnosti $|\,f_n(x)\,| \leq f_n(1/n) \leq 1/2n$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$, je $s_n \to 0$ stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

minulém příkladě. Následující příklad ukazuje, že Weierstrassovo kritérium není nutnou podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci ani v kombinaci s §86.

<u>P ř í k l a d</u> Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, kde

$$a_1(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x \in (0, \pi), \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus (0, \pi); \end{cases}$$
$$a_n(x) = \frac{1}{n} a_1(x - (n-1)\pi) \text{ pro } x \in \mathbb{R} \text{ a } n \geq 2 \text{ ?}$$

Řešení. Řada zřejmě konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, protože $a_n(x)$ je nenulové nejvýše pro jedno $n \in \mathbb{N}$. Přitom $a_n(x) \geq 0$ a $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} a_n(x) = \frac{1}{n}$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, Weierstrassovo kritérium tedy použít nelze.

Nicméně, označíme-li $s(x)$ součet a $s_n(x)$ n-tý částečný součet naší řady, platí $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} |s(x) - s_n(x)| = \frac{1}{n+1}$, řada tedy konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. ■

§88. Ekvivalentní podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci řady je **Bolzano-Cauchyova podmínka**.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in M) \left(\left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x) \right| < \varepsilon \right).$$

23 <u>P ř í k l a d</u> Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^4+x^2}$?

Řešení. Z limitního srovnávacího kritéria plyne (viz §43), že naše řada je (absolutně) konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$. Označme $a_n(x) = \frac{nx}{n^4+x^2}$ a zkusme opět najít maximum funkce $|a_n(x)|$.

Pro $x \in \mathbb{R}$ je $a_n'(x) = \frac{n(n^4-x^2)}{(n^4+x^2)^2}$. Proto je funkce a_n klesající na $(-\infty, -n^2]$, rostoucí na $[-n^2, n^2]$ a klesající na $[n^2, \infty)$. Protože limita funkce a_n v $-\infty$ i v $+\infty$ je rovna 0, je v bodě $-n^2$ minimum a v bodě n^2 maximum. Je tedy $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} |a_n(x)| = a_n(n^2) = 1/2n$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/2n$ je však divergentní, a tak nelze použít Weierstrassovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci na $\mathbb{R}$.

Když si však uvědomíme, co jsme zjistili o monotonii funkcí a_n, vidíme, že z Weierstrassova kritéria plyne stejnoměrná konvergence naší řady na intervalu $[-T, T]$ pro každé $T \in (0, \infty)$. Zdůvodněme to podrobně:

Je-li $x \in [-T, T]$ a $n > \sqrt{T}$, pak $|a_n(x)| \leq a_n(T)$. Přitom řada $\sum\limits_{n>\sqrt{T}} a_n(T)$ konverguje (řada ze zadání konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy i pro T). Proto řada $\sum\limits_{n>\sqrt{T}} a_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $[-T, T]$ dle Weierstrassova kritéria. Dle §86 na tomto intervalu konverguje stejnoměrně i řada ze zadání.

To, že řada nekonverguje stejnoměrně na (T, ∞) pro žádné $T \in \mathbb{R}$ dokážeme pomocí Bolzano-Cauchyho podmínky. Je totiž

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}(n^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)n^2}{(n+k)^4 + n^4} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{2(n+k)^3} \geq n \cdot \frac{n^2}{2(n+n)^3} = 1/16.$$

Zvolme tedy $\varepsilon = 1/16$. Je-li $n_0 \in \mathbb{N}$, vezměme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq n_0$ a $n^2 > T$, dále položme $p = n$ a $x = n^2$. Pak uvedený výpočet ukazuje, že není splněna Bolzano-Cauchyho podmínka, konvergence tedy není na (T, ∞) stejnoměrná. Podobně, nebo s využitím faktu, že funkce a_n jsou liché, vidíme, že řada nekonverguje stejnoměrně na $(-\infty, T)$ pro žádné $T \in \mathbb{R}$.

Shrňme výsledky: Řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, stejnoměrně na každém omezeném intervalu, na žádném neomezeném intervalu konvergence stejnoměrná není. ■

§89. Jednou z postačujících podmínek pro stejnoměrnou konvergenci ne nutně absolutně konvergentních řad je **Dirichletovo kritérium**.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M, jestliže jsou splněny následující podmínky:

(i) Částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ jsou stejně omezené na M (tj. existuje takové $K \in \mathbb{R}$, že pro každé $x \in M$ a $N \in \mathbb{N}$ je $|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)| \leq K$).

(ii) Posloupnost $\{b_n(x)\}$ je monotónní pro každé $x \in \mathbb{R}$ a stejnoměrně konverguje k 0.

Příklad Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{x}{n} \; ?$$

Řešení. Pro $x = 0$ řada konverguje absolutně, pro $x \neq 0$ zřejmě konverguje podle Leibnizova kritéria (že konvergence není absolutní lze zjistit například srovnáním s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ pomocí limitního srovnávacího kritéria).

Zkoumejme nyní stejnoměrnou konvergenci na intervalu $\left[\frac{\pi}{3}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$. Zde platí

$$|f_n(x)| \le \frac{\left(4\cos^2(\frac{\pi}{3}+\varepsilon)\right)^{2n}}{\sqrt{\log n}},$$

přičemž

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(4\cos^2(\frac{\pi}{3}+\varepsilon)\right)^{n}}{\sqrt{\log n}}$$

konverguje. Tedy $\sum_{n=2}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $\left[\frac{\pi}{3}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$ dle Věty 12.3.3.

Na intervalu $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ použijeme Větu 12.3.6. Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$ totiž konverguje stejnoměrně, pro každé $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ je $\left\{(4\cos^2 x)^n\right\}$ monotónní a $\left|(4\cos^2 x)^n\right| \le 1$. Tedy

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}(4\cos^2 x)^n$$

konverguje stejnoměrně na $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Tedy $\sum_{n=2}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Na intervalu $\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ postupujeme obdobně.

Díky Větě 12.1.8 je tak f spojitá na $\mathcal{D}(f)$.

Ukažme ještě, že $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ nekonverguje stejnoměrně na $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Kdyby tomu tak bylo, tak z Věty 12.1.7 plyne existence vlastní limity

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{\log n}},$$

což není pravda. ♣

2c

12.5.18. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konveregenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{2x}{x^2+n^2}\right), \qquad x \in [0,\infty).$$

Řešení. Jelikož $\log(1+t) \le t$, $t \in [0,\infty)$, máme pro $f_n(x) = \log\left(1+\frac{2x}{x^2+n^2}\right)$ odhad

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+n^2} \le 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{i} nftyf_n(x)$ konverguje na $[0,\infty)$.

Pro libovolný interval $[0,q]$ též máme odhad

$$|f_n(x)| = f_n(x) \le \frac{q}{n^2}, \qquad x \in [0,q],$$

což dle Věty 12.3.3 implikuje stejnoměrnou konvergenci na $[0,q]$.

Řada však nekonverguje stejnoměrně na $[0,\infty)$, neboť pro libovolné $N \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{2N} f_n(N) &= \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1+\frac{2N}{N^2+n^2}\right) \geq \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1+\frac{2N}{N^2+(2N)^2}\right)\\ &\geq N\log\left(1+\frac{2}{5N}\right) \to \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku na $[0,\infty)$, takže daná řada zde nekonverguje stejnoměrně. ♣

12.5.19. Příklad. Nechť $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ jsou takové, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$$

konverguje. Ukažte, že pak řada konverguje stejnoměrně na $[x_0,\infty)$.

Řešení. Pro $x \in [x_0,\infty)$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \rightrightarrows$ a $\left\{\frac{1}{n^{x-x_0}}\right\}$ je monotónní omezená posloupnost, tvrzení plyne z Věty 12.3.6. ♣

12.5.20. Příklad. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad x \in \mathbb{R},$$

má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou druhou derivaci na $(0,2\pi)$.

Řešení. Zjevně platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Označme $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ a uvažujme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin nx}{n}.$$

Z odhadu $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ a Věty 12.3.3 plyne stejnoměrná konvergence řady derivací na $\mathbb{R}$. Z Příkladu **??** plyne lokálně stejnoměrná konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0,2\pi)$. Z Věty **??** a 12.1.8 tak plyne spojitost $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ na $\mathbb{R}$ a spojitost $f'' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0,2\pi)$. ♣

12.5.21. Příklad. Dokažte, že Riemannova funkce zeta

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

splňuje $\zeta \in C^{\infty}(1,\infty)$.