# 3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Teorie

**Definice 1.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je *bodově konvergentní* na $M$, jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^{m} f_k\}_{m=1}^{\infty}$ je bodově konvergentní na $M$.

Pojmy *stejnoměrné* a *lokálně stejnoměrné* konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se definují analogicky.

**Věta 2** (Weierstrassovo kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí definovaných na neprázdné množině $M$. Označme

$$\sigma_n := \sup_{x \in M} |f_n(x)|.$$

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $M$.

**Poznámka 3** (Nutná podmínka konvergence)**.** Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $M$, potom $f_n \rightrightarrows 0$ na $M$.

**Věta 4** (Bolzano-Cauchyova podmínka)**.** Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na $M$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall m, n, \; m \geq n \geq n_0 \, \forall x \in M : \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| < \varepsilon.$$

**Poznámka 5** (Negace B-C podmínky)**.**

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall n_0 \, \exists m, n, \; m \geq n \geq n_0 \, \exists x \in M : \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| \geq \varepsilon.$$

**Poznámka 6** (Řada a spojitost)**.** Nechť $f_n$ jsou spojité funkce na $M$. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $M$, potom její součet je spojitá funkce.

## Algoritmus

1. Určíme bodovou konvergenci: zafixujeme $x$ a vyšetříme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. (Dáváme pozor na parametr.)

2. Zkusíme Weierstrassovu větu:

(a) Zafixujeme $n$ a hledáme $\sigma_n := \sup |f_n(x)|$.
Je to stejné jako u posloupností: Lze použít nějaké odhady nebo vyšetřit extrémy dané funkce (třeba pomocí první derivace). Supremum se pak může realizovat v bodech maxima i **minima** $f_n - f$ nebo v **krajních bodech** vč. $\pm\infty$.

(b) Pak vyšetříme $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$. Jestliže konverguje, máme stejnoměrnou konvergenci. Jestliže **nekonverguje, nevíme nic**.

(c) Můžeme zkusit i nějaký menší interval, jestli nemáme stejnoměrnou konvergenci alespoň na něm.

3. Stejnoměrnou konvergenci lze vyvrátit:

   (a) Nutnou podmínkou.

   (b) B-C podmínkou.

   (c) Známe-li součet, můžeme použít fakt, že součet spojitých při stejnoměrné konvergenci musí být také spojitá.

## Příklady

1. Vyšetřete konvergenci řad - zjistěte, na jakém intervalu konvergují (jako řady čísel), vyšetřete stejnoměrnou konvergenci a lok. stejnom. konvergenci. Není-li řečeno jinak, vyšetřujte na $\mathbb{R}$.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-7}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4+x^2}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)$

   (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2}$

   (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$

   (l)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$

2. Vyšetřete konvergenci řad (může dojít na BC podmínku).

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^4+x^2}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2x}{x^2+n^2}\right)$, $x \in [0,\infty)$

(l1) $\ln(1+t) \le t$, $t \in (-1,\infty)$