1a

Řešení:

1. $f_n(x) := e^{n(x-1)}$ na $(0,1)$. Nejprve vyšetříme bodovou konvergenci. Zcela standardně pomocí věty o limitě složené funkce a Heineho věty dostaneme, že bodově se f_n blíží k nule ($f(x) = 0$).

   Dále vyšetřujeme stejnoměrnou konvergenci, a sice dokážeme, že stejnoměrně nekonverguje. Buď si spočítáme, že $\sigma_n = 1$, nebo použijeme Moore-Osgoodovu větu – platí, že $\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = 1$, ale $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, a tedy konvergence nemůže být stejnoměrná.

   Zbývá vyšetřit lokálně stejnoměrnou konvergenci. Chtěli bychom dokázat, že pro daný interval $[a,b] \subseteq (0,1)$ platí, že na něm $f_n \rightrightarrows f$. Buď použijeme Diniho větu (ukázat monotonii je jednoduché), nebo spočítáme, že $\sigma_n = e^{-n(1-b)}$, tedy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

   Takže $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$, a tedy $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na $(0,1)$.

1b

2. $f_n(x) := \sin(\pi x^n)$ na $[0,1]$. Opět začneme bodovou konvergencí. Zjevně $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \sin(\pi) = 0$. A pro $x \in [0,1]$ máme $\lim_{n\to\infty} \pi x^n = 0$, a tedy z Věty o limitě složené funkce, spojitosti sinu a Heineho věty dostáváme

   $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 =: f(x).$$

   Stejnoměrná však tato konvergence není. Pomocí derivace zjistíme, že

   $$\sigma_n = \sup_{x\in[0,1]} \{f_n(x)\} = \sin\left(\pi\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n\right) = 1.$$

   Tedy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 1$.

   Poznamenejme, že nemusíme vyšetřovat zdali se v bodech $x_n := \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ opravdu nabývá maxima, stačí si uvědomit, že

   $$\sup_{x\in[0,1]} \{f_n(x)\} \geq f_n(x_n) = 1,$$

   což nám k závěru $\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0$ stačí.

   Rovnou můžeme prohlásit, že na intervale $[0,1]$ posloupnost f_n nekonverguje ani lokálně stejnoměrně. Pak by totiž musela konvergovat stejnoměrně na každém uzavřeném podintervale, a stačí zvolit původní interval $[0,1]$. Dokonce platí, že na kompaktní množině pojmy stejnoměrné a lokální stejnoměrné konvergence splývají.

   Nicméně na nějaké menší množině by pořád ještě f_n mohly lokálně stejnoměrně konvergovat. Kde je problém nám napoví body x_n, které jsme použili na vyvrácení stejnoměrné konvergence. Platí $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, tedy se dá tušit, že problém bude s bodem 1. Vskutku libovolné okolí 1 obsahuje od nějakého n_0 body $\{x_n\}_{n=n_0}^{\infty}$, a tedy by na něm nemohla být konvergence stejnoměrná.

   Nicméně když 1 odstraníme, pak už $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na $[0,1)$. Vskutku, uvažujme libovolné $c \in (0,1)$. Na intervale $[0,c]$ posloupnost f_n konverguje stejnoměrně, neboť pro $x \in [0,c]$ je $\sin(\pi x^n) \leq \pi x^n \leq \pi c^n$, a $\pi c^n \to 0$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,c]$.

Nechť je dán interval $[a, b] \subseteq [0, 1)$. Pak existuje takové c, aby $[a, b] \subseteq [0, c)$ (třeba $c = \frac{1+b}{2}$). A jelikož $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, c]$, tak tím spíš $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Což dokazuje lokálně stejnoměrnou konvergenci na intervale $[0, 1)$.

1b

3. $f_n(x) := \frac{nx}{1+n+x}$ na $(0, \infty)$. Bodová konvergence je triviální, f_n bodově konvergují k funkci $f(x) := x$.

   Vyšetřujme stejnoměrnou konvergenci. Njprve si všimneme, že

$$f(x) = x = \frac{nx}{x} \geq \frac{nx}{1 + n + x} = f_n(x).$$

   Tedy $|f_n(x) - f(x)| = f(x) - f_n(x)$. A

$$f(x) - f_n(x) = \frac{x + nx + x^2}{1 + n + x} - \frac{nx}{1 + n + x} = \frac{x^2 + x}{1 + n + x}.$$

   Triviálně $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x}{1+n+x} = \infty = \sigma_n$, a tedy to nekonverguje stejnoměrně.

   Nicméně konvergence je lokálně stejnoměrná. Nechť $[a, b] \subseteq (0, \infty)$. Pak

$$\sigma_n = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [a,b]} \frac{x^2 + x}{1 + n + x} \leq \frac{b^2 + b}{1 + n} \to 0,$$

   tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ a tedy $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na $(0, \infty)$.

4. $f_n(x) := nxe^{-nx^2}$ na $\mathbb{R}$. Pro bodovou konvergenci si nejprve uvědomíme, že triviálně $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(0) = 0$, a následně pro $x \neq 0$ použijeme l'Hospitalvo pravidlo (tedy limitu chápeme jako limitu funkce závislé na n s parametrem x)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{x^2 e^{nx^2}} = 0,$$

   a pak Heineho věta říká, že bodovou limitou funkcí f_n je $0 =: f(x)$.

   Zkoumejme stejnoměrnou konvergenci. Hledáme σ_n. Derivujme:

$$\frac{\partial}{\partial x} nxe^{-nx^2} = ne^{-nx^2} - 2n^2x^2e^{-nx^2} = ne^{-nx^2}(1 - 2nx^2). \tag{1}$$

   Jednoduchým výpočtem zjistíme, že derivace je nulová v bodech $\pm\sqrt{\frac{1}{2n}}$. Mohli bychom ověřit, že se tam nabývá maxima a minima, ale to je zbytečné, neboť

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \left| nxe^{-nx^2} \right| \right\} \geq \\ &\geq n\sqrt{\frac{1}{2n}} e^{-n\left(\sqrt{\frac{1}{2n}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \to \infty. \end{aligned}$$

   Tedy $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \infty \neq 0$, takže konvergence není stejnoměrná. Dokonce na $\mathbb{R}$ není ani lokálně stejnoměrná, neboť stejného argumentu se dá použít i pro interval $[-1, 1]$, neboť $x_n := \sqrt{\frac{1}{2n}} \in [-1, 1]$.

Body x_n se blíží k nule, což napovídá že problém bude u nuly. Zkusme tedy vyšetřit lokálně stejnoměrnou konvergenci na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Uvažujme tedy interval $[a, \infty)$ pro $a > 0$. Ze vztahu (1) plyne, že pro dost velká n je $x_n < a$, tedy funkce nxe^{-nx^2} je na $[a, \infty)$ klesající, a tedy $\sigma_n = nae^{-na^2}$, a $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, \infty)$, tedy $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na $(0, \infty)$. Zcela analogicky a symetricky bychom zjistili, že $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na $(-\infty, 0)$.

5. $f_n(x) := \frac{\log nx}{n}$ na $(0, \infty)$. Bodová konvergence je opět kombinace l'Hospitalova pravidla a Heineho věty:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log nx}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{nx}}{1} = \frac{1}{n} = 0 =: f(x).$$

Konvergence stejnoměrná není, stačí si uvědomit, že pro pevné n čím věší bude x, tím větší bude $|f_n(x) - f(x)|$. Neboli

$$\sigma_n \geq \lim_{x\to\infty} \frac{\log nx}{n} = \infty.$$

Vyšetřujme lokálně stejnoměrnou konvergenci. Mějme interval $[a, b] \subseteq (0, \infty)$. Musíme si dát pozor na absolutní hodnotu. Pro $nx < 1$ je $|\log nx|$ klesající, a pro $nx > 1$ je rostoucí. Tedy formálně to můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \sup_{x\in[a,b]} \left\{ \left| \frac{\log nx}{n} \right| \right\} = \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \left\{ \max \left\{ \frac{\log nx}{n}, -\frac{\log nx}{n} \right\} \right\} \leq \\
&\leq \max \left\{ \frac{\log nb}{n}, -\frac{\log na}{n} \right\},
\end{aligned}$$

neboť log je rostoucí a $-\log$ klesající. Jelikož $\frac{\log nb}{n}$ a $-\frac{\log na}{n}$ jdou k nule, jde k nule i to maximum, a tedy i σ_n. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ a $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na $(0, \infty)$.

* 6. $f_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ na $[0, \infty)$. Zde jen návod/náznak postupu. Pomocí třeba l'Hospitala a Heineho zjistíme, že bodovou limitou je funkce $f(x) = e^x$. Konvergence není stejnoměrná, neboť e^x roste u nekonečna rychleji než polynom, tedy

$$\lim_{x\to\infty} e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \infty.$$

Konvergence však je lokálně stejnoměrná. Z odhadu zbytku Taylorova polynomu plyne, že existuje takové $C > 0$ že

$$\left| \frac{\log(1+y)}{y} - 1 \right| \leq Cy$$

pro všechna $0 < y < 1$. Na $[0, K)$ tedy můžeme počítat

$$\left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| = e^x \left| e^{\left(\frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} - 1\right)x} - 1 \right| \leq e^K \left(e^{C\frac{K}{n}K} - 1 \right) \to 0.$$

Položíme-li $g_k(x) = f_k(x) - \sqrt{x}$, bude

$$0 \le g_k(x) = \frac{(x^k + e^x) - x^k}{(f_k(x))^{2k-1} + (f_k(x))^{2k-2}\sqrt{x} + \ldots + (\sqrt{x}\,)^{2k-1}} \le \frac{e^x}{2k}\,, \tag{24}$$

protože každý z $2k$ výrazů ve jmenovateli je větší než 1. Je-li tedy $b \in (1, +\infty)$ a $x \in (1, b)$, je $0 \le g_k(x) \le e^b/2k$, což pro $k \to \infty$ konverguje k 0. Tím je dokázána *stejnoměrná konvergence* $f_k(x) \to \sqrt{x}$ *v každém omezeném intervalu* $(1, b)$.

Protože $g_k(x) \ge \sqrt[2k]{e^x} - \sqrt{x} \to +\infty$ pro $x \to +\infty$ a každé k, *je konvergence nestejnoměrná v každém* $P(+\infty)$.[5]

Résumé. *Je-li* $I \subset \langle 0, +\infty)$, *konverguje posloupnost* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *stejnoměrně v* I, *právě když je interval* I *(shora) omezený; funkce* $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ *je přitom rovna* 1 *v intervalu* $\langle 0, 1\rangle$ *a* $\sqrt{x}$ *v intervalu* $\langle 1, +\infty)$. *Konvergence je lokálně stejnoměrná v* $\langle 0, +\infty)$.

Příklad 13.5. Je-li

$$f_k(x) := \frac{x}{k} \lg \frac{x}{k} \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathbb{R}_+\,, \tag{25}$$

je $f_k(x) \to 0$ pro $k \to \infty$ a všechna $x \in \mathbb{R}_+$ a také $f_k(x) \to 0$ pro $x \to 0+$ a každé $k \in \mathbb{N}$. Protože derivace

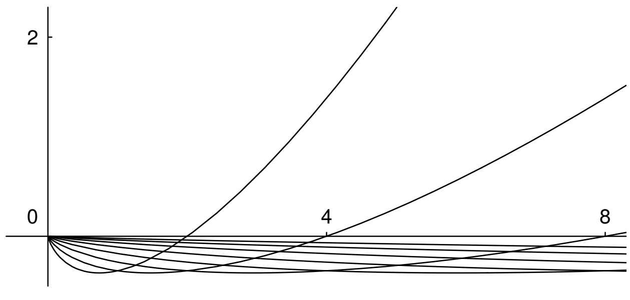
$$f_k'(x) = \frac{1}{k}\Big(1 + \lg \frac{x}{k}\Big) \tag{26}$$

je rovna 0, právě když je $x = x_k := k/e$, a protože $f_k(x_k) = -1/e$, funkce f_k klesá v intervalu $(0, k/e\rangle$.

Je-li $a \in \mathbb{R}_+$, klesá funkce f_k v intervalu $(0, a\rangle$ pro všechna $k > ae$, takže pro tato k platí odhad

$$0 > f_k(x) \ge f_k(a) \quad \text{pro všechna} \quad x \in (0, a\rangle\,.$$

Protože $f_k(a) \to 0$ pro $k \to \infty$, plyne z toho, že *posloupnost* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně v každém intervalu* $(0, a\rangle$, *kde* $a \in \mathbb{R}_+$, *a tedy obecněji i v každém omezeném intervalu* $I \subset \mathbb{R}_+$.



K Př. 13.5: f_{2^k}, $0 \le k \le 8$

[5]) Z obrázku by to bylo patrné, kdybychom interval $\langle 0, 4\rangle$ nahradili např. intervalem $\langle 0, 20\rangle$.

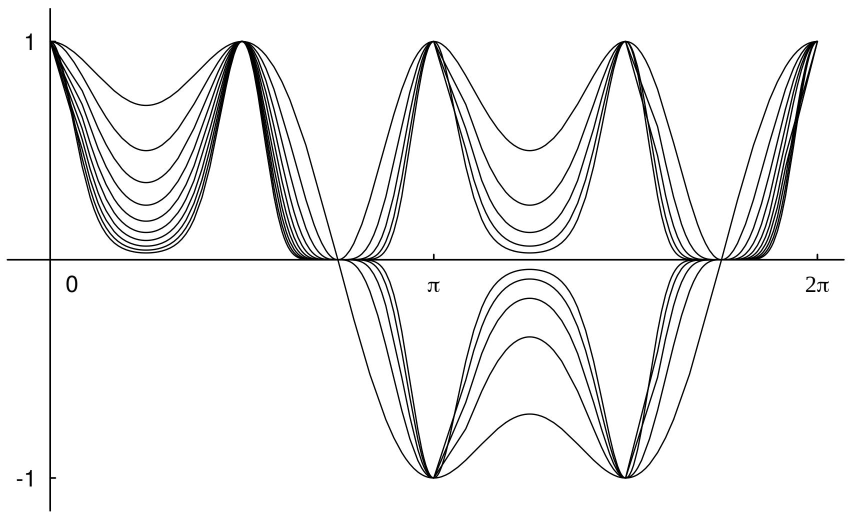
Obráceně, není-li interval $I \subset \mathbb{R}_+$ omezený, leží body x_k v I pro s. v. k, a protože $\lim_{k\to\infty} f_k \equiv 0$ v $\mathbb{R}_+$, zatímco $f_k(x_k) = -1/e$, *konvergence v I stejnoměrná není.*

Shrneme-li, vidíme, že *posloupnost* $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ *konverguje v intervalu* $I \subset \mathbb{R}_+$ *stejnoměrně, právě když je tento interval omezený.* [6]) *V* $\mathbb{R}_+$ *je konvergence lokálně stejnoměrná.*

Příklad 13.6. Nechť

$$f_k(x) := (g(x))^k\,, \text{ kde } g(x) := \sin^3 x + \cos^3 x \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}\,; \tag{27}$$

protože tyto funkce jsou 2π-periodické, vyšetříme posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ v $\mathbb{R}$ nejdříve v intervalu $I := \langle 0, 2\pi \rangle$.



K Př. 13.6: f_k, $1 \le k \le 10$

Derivace

$$g'(x) = 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x) \tag{28}$$

existuje všude v $\mathbb{R}$ a v I se rovná 0, právě když je x rovno některému z čísel $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$, přičemž hodnoty funkce g v těchto bodech jsou po řadě $1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1, 1$. V intervalu I nabývá tedy funkce g svého maxima rovného 1 v bodech $0, \frac{1}{2}\pi, 2\pi$ a minima rovného -1 v bodech $\pi, \frac{3}{2}\pi$; v ostatních bodech $x \in I$ je $|g(x)| < 1$.

Z toho ihned plyne, že

[6]) Při takovéto formulaci výsledku již není třeba *explicite* dodávat, že konvergence není stejnoměrná v žádném $P(+\infty)$.

Stejnoměrnou konvergenci posloupnosti i řady spojitých funkcí lze někdy dokázat i pomocí této věty:

Věta 13.8. (Diniho věta.) *Nechť X je kompaktní prostor a nechť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných funkcí spojitých v X. Pak platí:*

1. *Je-li posloupnost $\{f_k(x)\}$ pro každé $x \in X$ monotónní a omezená a je-li funkce $f := \lim_{k\to\infty} f_k$ spojitá v X, je konvergence $f_k \to f$ v X stejnoměrná.*

2. *Jsou-li funkce f_k nezáporné a je-li součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ spojitý v X, konverguje tato řada stejnoměrně v X.*

1P

Příklad 13.2. Posloupnost funkcí $f_k(x) := x^{(k+1)/(2k-1)}$ je v každém bodě $x \in \mathbb{R}_+^0$ monotónní – v bodech 0 a 1 je konstantní, pro $x \in (0, 1)$ rostoucí, pro $x > 1$ klesající. Protože všechny funkce f_k jsou v $\mathbb{R}_+^0$ spojité a protože totéž platí i o funkci $f(x) = \lim f_k(x) = \sqrt{x}$, konverguje posloupnost $\{f_k\}$ stejnoměrně v každém kompaktním intervalu $I \subset \mathbb{R}_+^0$; v $\mathbb{R}_+^0$ je tedy tato konvergence lokálně stejnoměrná. Vzhledem k tomu, že $f_k(k^{2k-1}) - f(k^{2k-1}) = k^k(k - 1/\sqrt{k}\,) \to +\infty$ pro $k \to \infty$, posloupnost nekonverguje stejnoměrně v žádném $P(+\infty)$, a tím spíše ne v $\mathbb{R}_+^0$.

* * *

Pro derivování a integrování tzv. **mocninných řad**, tj. řad tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - \zeta)^k\,, \tag{8}$$

kde **koeficienty** a_k a **střed** ζ stejně jako „proměnná“ z jsou komplexní čísla, platí daleko jednodušší pravidla než pro řady obecné.

Základním poznatkem o konvergenci mocninných řad je toto tvrzení:

Lemma 13.1. (Abelovo lemma.) *Konverguje-li mocninná řada* (8) *v některém bodě $z_1 \neq \zeta$, konverguje absolutně pro každé $z \in U(\zeta, |z_1 - \zeta|)$.*

Přímým důsledkem Abelova lemmatu je tato věta:

Věta 13.9. *Pro každou řadu* (8) *existuje číslo $R \in \langle 0, +\infty\rangle$ tak, že platí:*

$$|z - \zeta| < R \Rightarrow \text{řada (8) konverguje absolutně,} \tag{9}$$

$$|z - \zeta| > R \Rightarrow \text{řada (8) diverguje.} \tag{10}$$

Dodatek. *Je-li $R > 0$, řada* (8) *konverguje v množině $\{z \in \mathbb{C};\, |z - \zeta| < R\}$ lokálně stejnoměrně.* $\square$

Číslo R je vlastnostmi (9) a (10) určeno jednoznačně a nazývá se **poloměr konvergence** řady (8).

Protože nechceme měnit definici okolí $U(\zeta, R)$ (v níž je $R \in \mathbb{R}_+$) a protože poloměr konvergence může být i $+\infty$, zavedeme označení

$$K(\zeta, R) = \left\{ \begin{array}{cl} U(\zeta, R) & \text{pro} \quad R \in \mathbb{R}_+ \\ \mathbb{C} & \text{pro} \quad R = +\infty \end{array} \right\}. \tag{11}$$

1g

Řešení. Zřejmě $f_n(x) \to f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Odhadneme rozdíl $|f_n - f|$ na $\mathbb{R}$ a dostaneme

$$0 \le \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} \le \frac{1}{n} \to 0,$$

a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$. ♣

12.5.3. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

1h

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right), \quad x \in (0, \infty).$$

Řešení. Jelikož

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}},$$

konvergují funkce f_n bodově k fubnkci $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$.

Odhadujeme $|f - f_n|$ jako

$$0 \le \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)^2}$$

Z tohoto vyjádření vidíme, že

$$\sup_{x \in (0,\infty)} |f(x) - f_n(x)| \ge \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)^2} = \infty,$$

tj. $\{f_n\}$ nekonvergují stejnoměrně na $(0, \infty)$.

Na druhou stranu $f_n \rightrightarrows f$ na každém intervalu tvaru (q, ∞), kde $q > 0$. Vskutku, je-li $q > 0$, z přechozího máme odhad

$$\sup_{x \in (q,\infty)} |f(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2\sqrt{q}\,(2\sqrt{q})^2} \to 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na (q, ∞). Proto $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $(0, \infty)$. ♣

12.5.4. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

je totiž omezená, takže z odhadu platného pro $x \in [q, \infty)$

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left|(x+1)^3 \left(\pi - \operatorname{arccotg}(-nx^3)\right)\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|\frac{x+1}{x}\right|^3 \left|(-nx^3)(\pi - \operatorname{arccotg}(-nx^3))\right| \\
&\leq \frac{1}{n} \sup_{x\in[q,\infty)} \left|\frac{x+1}{x}\right|^3 \sup_{y\in[0,\infty)} g(y)
\end{aligned}$$

dostáváme stejnoměrnou konvergenci na $[q, \infty)$. ♣

12.5.10. Příklad. Vyšetřet bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \sqrt{x} n^{-\sqrt{x}} log n, \quad x \in [0, \infty).$$

Řešení. Jelikož

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sqrt{x}\log n e^{-\sqrt{x}\log}, & x > 0 \end{cases}$$

a $\lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0$, platí $f_n \to 0$ na $[0, \infty)$.

Počítejme $\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} f_n(x)$. Platí

$$f_n'(x) = e^{-\sqrt{x}\log n} \frac{\log n}{2}\left(-\log n + \frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x > 0.$$

Tedy pokud $n \geq 2$, $f_n' > 0$ na $(0, \log^{-2} n)$ a $f_n' < 0$ na $(\log^{-2} n, \infty)$. Proto má f_n v bodě $\log^{-2} n$ maximum o hodnotě e^{-1}. Posloupnost $\{f_n\}$ tak nekonverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$.

Uvažujeme-li však libovolný interval $[q, \infty)$, kde $q > 0$, dostaneme již na této množině stejnoměrnou konvergenci. Nalezneme totiž $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\log^{-2} n < q$ pro $n \geq n_0$. Pak pro $n \geq n_0$ platí

$$\sup_{x\in[q,\infty)} |f_n(x)| = f_n(q) \to 0,$$

což znamená $f_n \rightrightarrows 0$ na $[q, \infty)$. ♣

12.5.11. Příklad. Vyšetřet bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}, \quad x \in [0, \infty).$$

Řešení. Máme

$$3 \leq \sqrt[n]{x^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{23^n} = 3\sqrt[n]{2}, \quad x \in [0, 3],$$

a

$$x \leq \sqrt[n]{x^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2x^n} = x\sqrt[n]{2}, \quad x \in (3, \infty).$$

Dle Věty2.2.46 platí

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0,3], \\ x, & x \in (3,\infty). \end{cases}$$

Jelikož

$$(f_n - f)'(x) = \frac{1}{n}(x^n + 3^n)^{\frac{1}{n}-1} n x^{n-1} > 0, \quad x \in (0,3),$$

je $f_n - f$ nezáporná a rostoucí na $[0,3]$. Tedy

$$\sup_{x\in[0,3]} |f_n(x) - f(x)| \le \sqrt[n]{23^n} - 3 = 3\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \to 0,$$

což znamená, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,3]$.

Na intervalu $[3,\infty)$ platí

$$(f_n - f)'(x) = \frac{1}{n}(x^n + 3^n)^{\frac{1}{n}-1} n x^{n-1} - 1 < 0, \quad x \in (3,\infty),$$

a tedy je $f_n - f$ klesající na $[3,\infty)$. Zjevně je $f_n - f > 0$, a proto

$$\sup_{x\in[3,\infty]} |f_n(x) - f(x)| \le \sqrt[n]{23^n} - 3 = 3\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \to 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ i na $[3,\infty)$. Proto $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,\infty)$. ♣

12.5.12. Příklad. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$ lichá a v nekonečnu má limitu 0. Jelikož

$$f_n'(x) = \frac{n}{(1+n^5x^2)^2}\left(1 - n^5x^2\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

Má funkce v bodě $-\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ minimum a v bodě $\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ maximum. V absolutní hodnotě lze tak funkci f_n odhadnout číslem $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konverguje, zadaná řada konverguje stejnoměrně dle Věty 12.3.3. ♣

12.5.13. Příklad. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n\log^2 n}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

12.1.18. Definice. Nechť M je množina a $A \subset M$. Pak **charakteristickou funkcí** množiny A nazýváme funkci $\chi_A \colon M \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A; \\ 0 & \text{pro } x \in M \setminus A. \end{cases}$$

2

12.1.19. Příklad. Dokažte, že jestliže vynecháme kterýkoli z předpokladů Diniovy věty (kompaktnost množiny K, spojitost funkcí $\{f_n\}$, spojitost funkce f nebo monotonii posloupnosti $\{f_n\}$), pak věta neplatí.

Řešení. (a) Položme $K = [0,1)$ a $f_n(x) = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1)$. Potom K není kompaktní. Posloupnost $\{f_n\}$ je nerostoucí na K a její bodovou limitou f je nulová funkce. Zřejmě jsou tedy všechny funkce f_n i funkce f spojité na K. Posloupnost $\{f_n\}$ ale nekonverguje k f stejnoměrně. To lze dokázat obdobně jako v Příkladu 12.1.3(a).

(b) Položme $K = [0,1]$ a $f_n(x) = \chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$. Potom K je kompaktní, posloupnost $\{f_n\}$ je nerostoucí na K a její bodovou limitou f je nulová funkce. Funkce f je tedy zřejmě spojitá na $[0,1]$, ale funkce f_n spojité nejsou. Posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje k f stejnoměrně, neboť pro $x_n = \frac{1}{2n}$ platí $f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}$ a stačí použít 12.1.2.

(c) Položme $K = [0,1]$ a $f_n(x) = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$. Potom K je kompaktní, všechny funkce f_n jsou spojité na K, posloupnost $\{f_n\}$ je nerostoucí na K a její bodovou limitou je funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Funkce f tedy není spojitá na $[0,1]$. Z Příkladu 12.1.3(a) víme, že posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje k f stejnoměrně.

(d) Položme $K = [0,1]$ a definujme pro $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & x \in [0, \frac{1}{2n}], \\ 2 - 2nx, & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Potom K je kompaktní, všechny funkce f_n jsou spojité na K a bodovou limitou f posloupnosti $\{f_n\}$ je nulová funkce, která je zřejmě spojitá. Posloupnost $\{f_n\}$ ovšem není monotónní na K a nekonverguje k f stejnoměrně, neboť pro $x_n = \frac{1}{n}$ platí $f_n(x_n) = 1$. ♣

ať zvolíme $k \in \mathbb{N}$ jakkoli. Všimněte si, že limitní funkce $(\pi/2)\operatorname{sgn} x$ *není* spojitá, že však

$$f_n'(x) = \frac{n}{1+n^2x^2} \to \left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x\right)'$$

všude v $\mathbb{R}$. Skutečně, pro $x = 0$ je tato limita rovna $+\infty$, v ostatních případech je rovna 0. Později uvidíme, že ani za předpokladu $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu I nemusí obecně platit $f_n' \to f'$ na I.

2. Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$. Potom se lehce ukáže, že platí $f_n \to 0$ na intervalu $[0,1]$; k tomu stačí vyšetřit konvergenci řad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pro každé $x \in [0,1]$. Výpočtem dostaneme

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+2}\,, \quad \text{a tedy} \quad \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n^2}{2n+2} \to +\infty\,.$$

Za povšimnutí stojí jiný zápis stejné věci:

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq +\infty = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Zaměníme-li v předchozím příkladu koeficient n^2 ve vyjádření funkcí f_n za n, bude limita integrálů konečná a bude rovna $(1/2)$; závada tedy není „v nekonečnosti“. Názornější a tak i zapamatovatelnější příklad sestrojíme takto: nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce f_n definovány jako v Příkladu 12.3.7. Využijeme-li názorného významu integrálu, snadno nahlédneme, že $\int_0^1 f_n = 1/2^{n+1}$. Nyní definujeme posloupnost funkcí $\{g_n\}$: položíme $g_n := 2^{n+1} f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Snadno nahlédneme, že $\int_0^1 g_n = 1$ (tak, jak se v „trojúhelníčcích“ zkracuje základna, roste zároveň jejich výška, proto jejich obsah zůstává konstantní) a $g_n \to 0$; nulová funkce má i nulový integrál a je

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Situace s derivováním je delikátnější. Definujeme-li

3

$$f_n(x) = (1/n)\operatorname{arctg} x^n\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

pak $\| f_n - 0 \|_\infty \le \pi/2n \to 0$ a *nejen* $f_n \to 0$ na $\mathbb{R}$, ale dokonce i $f_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$. Přesto však pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je

$$f_n'(1) = \left.\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}\,,$$

tedy f_n' nekonvergují k derivaci „limitní nulové funkce“ v bodě 1. V bodě -1 nastává jiný efekt, neboť $\lim_{n\to\infty} f_n'(-1)$ dokonce neexistuje. Bližší pohled na derivace f_n' ukazuje, že $f_n'(x) \to 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$; na intervalu $(-1,1)$ platí odhad $|f_n'(x)| \le |x|^{n-1} \to 0$, zatímco pro $|x| > 1$ je $|f_n'(x)| \le (1/|x|)^{n+1} \to 0$. Rozhodně však *neplatí* $f_n' \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$.

5. Definujme pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}\,; \tag{14.5}$$

4 a 5 na webu