2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Charakterizace stejnoměrné konvergence)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Pak

$$f_n \rightrightarrows f$$

právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\} = 0.$$

Věta 2 (Diniho věta)**.** Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je **omezený** interval a $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou **spojité** funkce. Je-li $\{f_n(x)\}$ pro každé $x \in [a, b]$ **monotónní** a **omezená** a je-li funkce $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ **spojitá** na $[a, b]$, pak $f_n \rightrightarrows f$.

Příklady

Zdroje příkladů:
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/MFF-NMMA201-1819/Cv08%20-%20Stejnom%c4%9brn%c3%a1%20konvergence%20II%20-%20posloupnosti%20funkc%c3%ad%202.pdf
http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/animace/k0061/math/html/index.html

1. Vyšetřete konvergenci: Najděte bodovou limitu, vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci, případně najděte intervaly, kde posloupnost konverguje stejnoměrně.

   (a) $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ na $(0, 1)$
   (b) $f_n(x) = \sin(\pi x^n)$ na $[0, 1]$
   (c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n + x}$ na $(0, \infty)$
   (d) $f_n(x) = \dfrac{\ln(nx)}{n}$
   (e) $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \ln \dfrac{x}{n}$
   (f) $f_n(x) = x^{\frac{n+1}{2n-1}}$
   (g) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$
   (h) $f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)$
   (i) $f_n(x) = \sqrt{x} n^{-\sqrt{x}} \ln n$
   (j) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}$ na $[0, \infty)$

2. Ukažte, že vynechání byť jediného předpokladu Diniho věty způsobí její neplatnost:

   (a) kompaktnost intervalu $[a, b]$,
   (b) spojitost f_n,
   (c) spojitost f,
   (d) monotonie $f_n(x)$.

   Tedy najděte $f_n \to f$ takové, že nesplňují vždy jen jednu podmínku, ale přitom $f_n \not\rightrightarrows f$. (Návody níže.)

   Věta 3. Nechť (a, b) je **omezený** interval, $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$. Nechť

   (a) f_n mají vlastní derivaci na (a, b),
   (b) existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $\{f_n(x_0)\}$ konverguje,
   (c) $\{f_n'\}$ konverguje stejnoměrně na (a, b).

   Pak existuje funkce f taková, že $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b), f má vlastní derivaci na (a, b) a platí $f_n' \rightrightarrows f'$ na (a, b).

3. Nechť $f_n = \frac{1}{n}\arctan(x^n)$. Ukažte, že f_n konverguje stejnoměrně k jisté f, ale není pravda, že $f_n' \rightrightarrows f'$.

4. Nechť $f_n = \sin\frac{x}{n^2}$. Najděte bodovou limitu, ověřte (lokálně) stejnoměrnou konvergenci. Najděte derivace a ověřte předpoklady Věty o derivacích. Ukažte, že závěry věty platí.

   Věta 4. Nechť (a, b) je **omezený** interval, $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b) a $f_n \in \mathcal{N}(a, b)$. Pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a
   $$\lim_{n\to\infty} (N)\int_a^b f_n = (N)\int_a^b f.$$

5. Nechť f_n je definována takto: $f_n(0) = \frac{1}{n}$, mimo interval $[-n, n]$ je konstantně nulová a na intervalu $[-n, n]$ je dodefinována lineárně. Načrtněte první 3 funkce (vyjdou takové špičaté kopečky). Ověřte, zda $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty} f_n$ nebo ne. Pak ověřte předpoklady věty nebo najděte předpoklad, který není splněný.

(1e) ln může být i záporný;)
(1g) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
(1h) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
(1j) 2 policajti, rozdělte na intervaly $[0, 3]$, $[3, \infty)$
(2a) x^n na $[0, 1)$
(2b) $\chi_{(0,\frac{1}{n})}$ na $[0, 1]$
(2c) x^n na $[0, 1]$
(2d) kopeček o výšce 1 na $[0, \frac{1}{n}]$, jinak 0 na $[0, 1]$