1. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_n = 1^\infty$ *konverguje bodově* k funkci f na M, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

pro každé $x \in M$, neboli

$$\forall x \in M \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \to f$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_n = 1^\infty$ *konverguje stejnoměrně* k funkci f na M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall x \in M \, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_n = 1^\infty$ *konverguje lokálně stejnoměrně* k funkci f na M, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$ takové, že $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně k f na $(x - r, x + r)$. Značíme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$.

Poznámka 2. Jestliže $f_n \rightrightarrows f$, pak $f_n \to f$ na M.

Věta 3 (Charakterizace stejnoměrné konvergence)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Pak

$$f_n \rightrightarrows f$$

právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\} = 0.$$

Věta 4 (Stejnoměrná konvergence a spojitost.)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, kde f_n jsou **spojité** funkce. Nechť navíc $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na M. Pak f je také **spojitá** na M.

Věta 5 (Charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu.)**.** Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval (i neomezený) a $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Pak $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b) právě tehdy, když $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[c, d] \subset (a, b)$.

Věta 6. Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Nechť navíc

1. $\exists r > 0$: $f_n \rightrightarrows f$ na $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists a_n$: $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$.

Pak existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a jsou si rovny.

Algoritmus

1. Určíme bodovou limitu: zafixujeme x a spočteme $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. (Dáváme pozor na parametr.) Funkci $f(x)$ použijeme v dalším postupu.

2. Zkusíme test na stejnoměrnou konvergenci.

   (a) Zafixujeme n a hledáme $\sigma_n := \sup |f_n(x) - f(x)|$. Lze použít nějaké odhady nebo vyšetřit extrémy dané funkce (třeba pomocí první derivace). Supremum se pak může realizovat v bodech maxima i **minima** $f_n - f$ nebo v **krajních bodech** vč. $\pm\infty$.

   (b) Pak spočteme $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$. Stejnoměrnou konvergenci máme právě tehdy, když limita vyjde 0.

3. Stejnoměrnou konvergenci lze vyvrátit, pakliže f_n jsou spojité, ale f není. (Body nespojitosti nám dávají tip, kde by mohla zhavarovat stejnoměrná konvergence.)

4. Pokud stejnoměrná konvergence na celém M neprošla, můžeme zkusit ještě lokálně stejnoměrnou konvergenci. Najdeme problematické body - kde jsou nespojitosti f, kde byly extrémy... Pro ostatní x pak najdeme okolí, které se těmto bodům vyhne a znovu aplikujeme test se supremem.

5. Doladíme problematické body a napíšeme závěr.

Příklady

Zdroj většiny příkladů: Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda: Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

1. Vyšetřete konvergenci funkcí (najděte bodovou limitu, vyšetřete stejnoměrnou konvergenci a lok. stejnom. konvergenci). Není-li řečeno jinak, vyšetřujte na $\mathbb{R}$.

   (a) $f_n(x) = \dfrac{n^2x^3}{1+n^2x^2}$

   (b) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ na $[0,1]$

   (c) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$

   (d) $f_n(x) = e^{-|x-\frac{1}{n}|n^2}$

   (e)* $f_n(x) = \ln(x)\sin\left(\dfrac{x}{n(1+x^2)}\right)$ na $(0,\infty)$

   (f) $f_n(x) = e^{-(nx)^2}$

   (g) $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$

   (h) $f_n(x) = \dfrac{\arctan(nx)}{nx}$

   (i) $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$

Zkouškové příklady

2. (a) $f_n(x) = n\arctan\dfrac{x}{n}$

   (b) $f_n(x) = \left|\cos\dfrac{x}{n}\right|^n$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}}$

   (d) $f_n(x) = e^{\frac{|x|-n}{|x|+n}} + e^{-\frac{|x|-n}{|x|+n}}$

(1e) $|\sin x| < |x|$