Lepení ODR se separovanými proměnnými

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $h : (c, d) \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Rovnici tvaru

$$y' = g(x)h(y)$$

nazveme *ODR se separovanými proměnnými. Počátečními podmínkami* rozumíme rovnici $y(x_0) = y_0$.

Lemma 2. Nechť $y_1(x) = (a, x_0) \to \mathbb{R}$, $y_2(x) = (x_0, b) \to \mathbb{R}$ jsou řešení rovnice

$$y' = F(x, y). \tag{1}$$

Nechť $\lim_{x\to x_0-} y_1(x) = y_0 = \lim_{x\to x_0+} y_2(x)$. Nechť $F(x, y)$ je spojitá v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, x_0), \\ y_0, & x = x_0, \\ y_2(x), & x \in (x_0, b) \end{cases}$$

je řešením rovnice v celém (a, b).

Věta 3. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $c < d$. Nechť $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ je **spojitá** a $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ je **spojitá a nenulová**. Nechť $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (c, d)$.

Označme

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in (a, b),$$
$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad y \in (c, d).$$

Potom existuje právě jedno maximální řešení y rovnice $y' = g(y)h(x)$ splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Definičním intervalem I tohoto řešení je maximální interval ze všech intervalů tvaru $(x_0 - \delta, x_0 + \eta)$, které splňují $(x_0 - \delta, x_0 + \eta) \cup (a, b)$ a

$$H(x) \in G((c, d)), \qquad x \in I.$$

Příklad

$y' = \sqrt[3]{y^2}$

1. Pracujeme s funkcemi $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$, $h(x) = 1$.

   Řešení hledáme na intervalech $x \in I = (-\infty, \infty)$.

   Stacionární řešení je $y \equiv 0$.

   Intervaly, kde je g nenulové (ale definované), jsou $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, \infty)$.

2. Po zintegrování obou stran rovnice, dostáváme

$$3\sqrt[3]{y} = x + C.$$

Označme $G(y) = 3\sqrt[3]{y}$, $H(x) = x$.

3. (a) Zafixujeme intervaly $J_1 = (-\infty, 0)$, $I = \mathbb{R}$ a konstantu $C \in \mathbb{R}$.
Hledáme takové $x \in I$, aby

$$H(x) + C \in G(J_1).$$

V tomto případě je

$$G(J_1) = (-\infty, 0).$$

Potřebujeme tedy, aby

$$x + C < 0,$$

tedy

$$x < -C.$$

Pro taková x vyjádříme y:

$$y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3.$$

(b) Opět zafixujeme intervaly, tentokrát $J_2 = (0, \infty)$, $I = \mathbb{R}$ a konstantu $C \in \mathbb{R}$ (může to být jiná konstanta než v předešlém případě).
Opět hledáme takové $x \in I$, aby

$$H(x) + C \in G(J_2).$$

V tomto případě je

$$G(J_1) = (0, \infty).$$

Potřebujeme tedy, aby

$$x + C > 0,$$

tedy

$$x > -C.$$

Pro taková x vyjádříme y:

$$y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3.$$

4. Máme tedy různá řešení:

(a) $y = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$ (stacionární řešení);

(b) $y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3$ pro $x \in (-C, \infty)$, kde $C \in \mathbb{R}$;

(c) $y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3$ pro $x \in (\infty, -D)$, kde $D \in \mathbb{R}$.

5. Přichází čas **lepení**. Když se podíváme na původní diferenciální rovnici, tak je vidět, že bychom rádi našli řešení (pokud možno) na celém $\mathbb{R}$. Stacionární řešení toto splňuje, další řešení ovšem nikoli.

   (a) Mějme tedy $y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3$ pro $x \in (-C, \infty)$, kde $C \in \mathbb{R}$.
   Potřebujeme najít řešení, které bude definované na $(-\infty, -C)$, v bodě $x = -C$ bude mít stejnou hodnotu, a navíc se tato dvě řešení napojí hladce (bude tam existovat derivace - nebude tam zub).
   Limita funkce
   $$\lim_{x \to -C+} \left(\frac{x+C}{3}\right)^3 = 0.$$
   Zkusme to nalepit se stacionárním řešením, tedy s funkcí $y = 0$ pro $x \in (-\infty, -C)$.
   Máme
   $$\lim_{x \to -C-} 0 = 0,$$
   hodnoty se tedy shodují.
   Lemma (na začátku textu) pak zajistí, že toto napojení je hladké.
   Můžeme tedy definovat nové řešení
   $$y_1(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -C), \\ 0 & x = -C, \\ \left(\frac{x+C}{3}\right)^3, & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

   (b) Stejným způsobem se dá nakombinovat funkce
   $$y_2(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+C}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -C), \\ 0 & x = -C, \\ 0 & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

   (c) Tím jsme pořád nepostihli všechny kombinace, ještě je tu funkce
   $$y_3(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+D}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -D), \\ 0 & x = -D, \\ 0 & x \in (-D, -C). \\ 0 & x = -C, \\ \left(\frac{x+C}{3}\right)^3, & x \in (-C, \infty), \end{cases}$$
   kde $D \geq C$.

6. Řešením jsou pak funkce y_1, y_2, y_3 a stacionární řešení $y = 0$, všechny definované na $\mathbb{R}$.