

25. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>

Teorie

Definice 1. *Lineární diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty* rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x), \quad (1)$$

kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b) .

Homogenní rovnici příslušnou k rovnici (1) rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0. \quad (2)$$

Poznámka 2. Maximální řešení rovnice (2) jsou definována na celém \mathbb{R} .

Definice 3. *Charakteristickým polynomem* rovnice (2) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 4 (tvar fundamentálního systému). Necht' χ je charakteristický polynom rovnice (2). Necht' $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu χ s násobnostmi r_1, \dots, r_s . Necht' $\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_l + \beta_l i$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu χ s kladnou imaginární částí a násobnostmi q_1, \dots, q_l , kde $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$. Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (2):

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \dots & x^{r_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_s x}, & x e^{\lambda_s x}, & \dots & x^{r_s-1} e^{\lambda_s x}, \\ e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, & x e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \\ e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, & x e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, & x e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, & \dots & x^{q_l-1} e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, \\ e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, & x e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, & \dots & x^{q_l-1} e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x \end{array}$$

Věta 5 (speciální pravá strana). Necht'

$$f(x) = e^{\mu x} \cdot (P(x) \cos \nu x + Q(x) \sin \nu x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (1) ve tvaru

$$y_p(x) = x^m e^{\mu x} \cdot (R(x) \cos \nu x + S(x) \sin \nu x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde R, S jsou polynomy stupně ne většího než $\max\{\text{st } P, \text{st } Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\mu + i\nu$ jakožto kořen charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.

Algoritmus

1. Vyřešíme homogenní rovnici:
 - (a) Napíšeme charakteristický polynom a najdeme kořeny.
 - (b) Sestavíme řešení.
2. Zkontrolujeme, že pravá strana je ve vhodném tvaru, případně jestli není třeba součtem vhodných tvarů.
3. Použijeme Větu o Speciální pravé straně a odhadneme tvar řešení (s několika neznámými koeficienty).
4. Dosadíme do nehomogenní rovnice a dopočteme koeficienty.
5. Řešením je homogenní + dopočtené řešení.

Příklady

1. Přiřaďte funkce ke tvaru $e^{ax}(P(x)\cos(bx) + Q(x)\sin(bx))$:

(1) $12x^2 + 2x + 1$	(A) $e^{0x}((3x - 1)\cos 0x + 0\sin 0x)$
(2) $3x - 1$	(B) $e^{0x}((12x^2 + 2x + 1)\cos 0x + 0\sin 0x)$
(3) $8xe^x$	(C) $e^{2x}((-2)\cos 1x + 0\sin 1x)$
(4) $-2e^{2x}\cos x$	(D) $e^{1x}((8x)\cos 0x + 0\sin 0x)$
2. Najděte řešení diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou
 - (a) $y'' + y' - 6y = 12x^2 + 2x + 1$
 - (b) $y'' - 3y' = 3x - 1$
 - (c) $y'' + 2y' + 5y = 8xe^x$
 - (d) $y'' + y = x + \sin x$
 - (e) $y'' - 4y' + 5y = -2e^{2x}\cos x, y(0) = 0, y'(0) = 0$
3. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $y''' + y'' + y' + y = 8xe^x, y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$	(d) $y''' - 4y'' + 4y' = 2x + e^{2x} - \cos 2x$
(b) $y^{iv} + 8y'' + 16y = 64x \sin 2x$	(e) $y''' + y'' - y' - y = 4 \cos x$
(c) $y''' - 2y' + 4y = xe^{-2x}$	(f) $y''' + 4y'' - 7y' - 10y = 100x^2 - 64e^{3x}$

4. V jakém tvaru budete hledat řešení?

- | | |
|--|---------------------------------------|
| (1) $y''' + y'' + y = e^x$ | (A) e^x |
| (2) $y''' + y'' - 2y = (x + 1)e^x$ | (B) Ae^x |
| (3) $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$ | (C) $(Ax + B)e^x$ |
| (4) $y''' + y'' = x^3 + x^2$ | (D) $x(Ax + B)e^x$ |
| (5) $y'' + y' + y = e^x \cos x$ | (E) $x^2(Ax + B)e^x$ |
| (6) $y'' - y' + y = \cos x - \sin x$ | (F) Ae^{-x} |
| (7) $y''' - 2y'' + 5y' = 2e^x \sin 2x$ | (G) $Ax^3 e^{-x}$ |
| | (H) $(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-x}$ |
| | (I) $Ax^3 + Bx^2$ |
| | (J) $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ |
| | (K) $x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$ |
| | (L) $(x^2 + x)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$ |
| | (M) $e^x(A \cos x)$ |
| | (N) $e^x(A \cos x + B \sin x)$ |
| | (O) $x(A \cos x + B \sin x)$ |
| | (P) $A \cos x + B \sin x$ |
| | (Q) $xe^x(A \cos 2x + B \sin 2x)$ |
| | (R) $e^x(A \cos 2x + B \sin 2x)$ |

Zkouškové příklady

5. Najděte řešení diferenciálních rovnic

- | | |
|--|---|
| (a) $y^{(4)} - y = x^2$ | (d) $y''' + 4y'' + y' - 6y = 10x \sin x$ |
| (b) $y^{(4)} - 10y'' + 25y = 1 + \sin x$ | |
| (c) $y''' + 2y'' + y' + 2y = xe^x$ | (e) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = \sin x + x \cos x$ |

Bonus

6. Najděte řešení ODR

- | | |
|--------------------------------------|---|
| (a) $y'' = -y, y(0) = 0, y'(0) = 1$ | (c) $y'' = -y, y(0) = 0, y'(\pi) = 0$ |
| (b) $y'' = -y, y(0) = 2, y'(0) = -3$ | (d) $y'' = -y, y(0) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 0$ |

7. V závislosti na parametru $r \in \mathbb{R}$ najděte FSŘ diferenciální rovnice

$$y'' + ry = 0.$$

8. V závislosti na konstantách $p, q > 0$ najděte FSŘ diferenciální rovnice

$$y'' + 2py' + q^2y = 0.$$

9. Proč se malé dítě na pružinové houpačce (zvírátko na pružině) houpe rychleji než dospělý? Pohyb je popsán rovnicí $my'' + ky = 0$, kde m je hmotnost houpaččího se člověka a k charakterizuje pružinu.



Figure 1: <https://www.ihriska-picolino.sk/pruzinova-hojdacka-zirafa-15106>