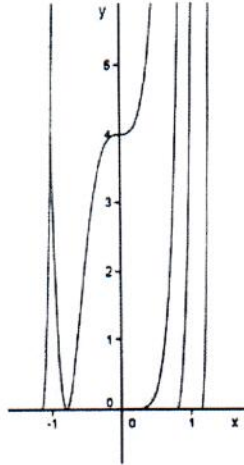


Grafické řešení pro $C = -3, -1, 0, 1, 3$:



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou polovinu pro $y > 0$.

1a)

Příklad 3.13

$$\frac{y'}{y^2} = e^x$$

$$I = \mathbb{R}$$

Řešení DR

zde musíme vyřadit funkci $y = 0$

$$I_1 = (-\infty; 0) \quad I_2 = (0; \infty)$$

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int e^x dx$$

$$G(y) \rightarrow -\frac{1}{y} = e^x + C$$

řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = -\frac{1}{e^x + C}$$

$$G(I_1) = (0; \infty)$$

$$G(I_2) = (-\infty; 0)$$

nyní musíme stanovit podmínku ($e^x + C \neq 0$)

$$e^x + C \neq 0$$

$$e^x \neq -C$$

$$(1) \text{ chceme } e^x + C > 0 \rightarrow e^x > -C \begin{cases} C < 0 \\ x > \ln(-C) \end{cases} \quad C \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

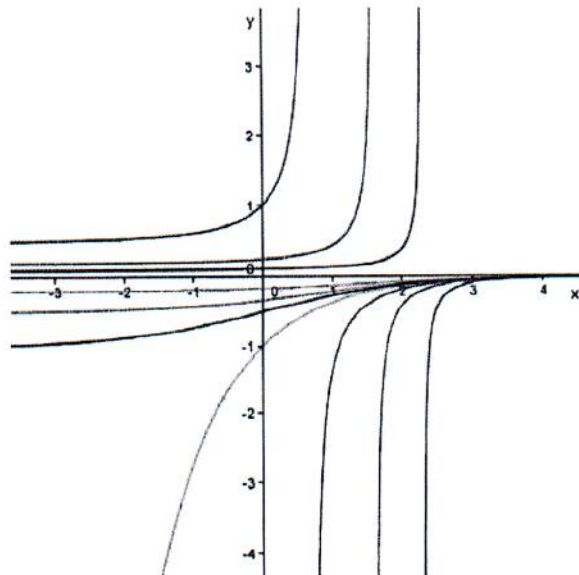
$$(2) \text{ chceme } e^x + C < 0 \rightarrow e^x < -C \begin{cases} C < 0 \\ x < \ln(-C) \end{cases} \quad C \geq 0 \text{ nelze}$$

pro $C \geq 0$ je podmínka vždy splněna a pro $C < 0$ existuje jedno x , pro které řešení $y = -\frac{1}{e^x + C}$ není definováno $x = \ln(-C)$, řešením pak jsou všechny funkce:

$$y = -\frac{1}{e^x + C}$$

kde $x \in \mathbb{R}$ pro $C \geq 0$, nebo $x \in \mathbb{R} - \{\ln(-C)\}$ pro $C < 0$.

Grafické řešení pro $C = -10, -5, -2, 0, 1, 2, 5$:



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = 0$.

$$y(0) = 1/2$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{e^0 + C}$$

$$\Rightarrow 1 + C = -2$$

$$C = -3$$

$$y = -\frac{1}{e^x - 3}$$

Příklad 3.14

$$y^4 y' = 2x^4$$

Řešení DR

$$y^4 \frac{dy}{dx} = 2x^4$$

$$\int y^4 dy = \int 2x^4 dx$$

15

Příklad 3.3

$$\frac{y'}{y} = 4x$$

Řešení DR

zde musíme vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 4x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 4x dx$$

$$\ln|y| = 2x^2 + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{2x^2 + C}$$

$$|y| = e^{2x^2 + C}$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{2x^2}$$

(1) $2x^2 + C \in \mathbb{R} \checkmark$

(2) $2x^2 + C \in \mathbb{R} \checkmark$

$G(y)$ → $H(x)$

2 se zapisat
i vejdruhu:

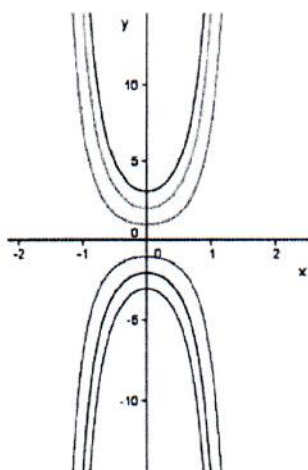
kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, protože $C \in \mathbb{R}, e^C \in (0; \infty)$ a $-e^C \in (-\infty; 0)$, pak konstanta K nabývá hodnot $K \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \Rightarrow K \neq 0$ a řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = K \cdot e^{2x^2}$$

pak $x \in \mathbb{R}, K \neq 0$.

Grafické řešení pro $K = -3, -2, -1, 1, 2, 3$



$y(0) = 3$
 $3 = k e^0 \quad k=3$
 $\rightarrow y = 3e^{2x^2}$

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = 0$.

**Příklad 3.4**

$$y' = 4xy$$

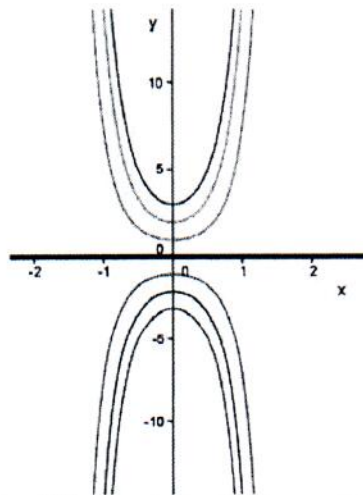
Řešení DR

$$\frac{y'}{y} = 4x$$

V předchozím kroku jsme dělili rovnici y a musíme stanovit podmínku $y \neq 0$, tím se připravíme o jedno řešení (singulární řešení) – nulovou funkci. (Derivace nulové funkce je rovna nule, $y = 0$ a $y' = 0$ rovnici $y' = 4xy$ vyhovují.)

Řešení upravené rovnice je totožné s řešením př. 2, vyšlo nám $y = K \cdot e^{2x^2}$, kde $x \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$. Nyní se podíváme, zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = K \cdot e^{2x^2}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Řešením jsou tedy všechny funkce

$$y = K \cdot e^{2x^2}$$

pak $x \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$.Grafické řešení pro $K = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

1d

Příklad 3.6

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1}$$

$$I_1 = (-\infty, 0)$$

$$I_2 = (0, \infty)$$

$$J_1 = (-\infty, 1)$$

$$J_2 = (1, \infty)$$

Řešení DR

musíme určit podmínku, že $x \neq 1$ a vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x-1| + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x-1| + C}$$

$$|y| = e^C \cdot e^{\ln|x-1|}$$

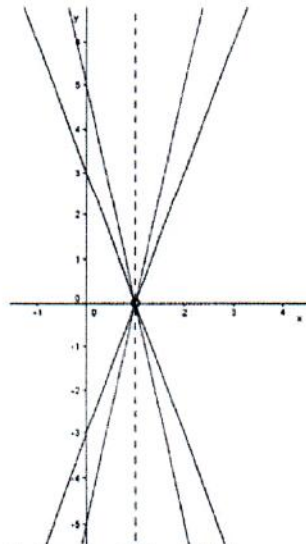
$$y = \pm e^C \cdot (x-1)$$

 $H(x) \quad x \in I_1$
 $\text{nebo } x \in I_2$

$$G(I_1) = G(I_2) = \mathbb{R}$$

kde $x \neq 1, C \in \mathbb{R}$.Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$

$$y = K \cdot (x-1)$$

pak $x \neq 1, K \neq 0$.Grafické řešení pro $K = -5, -3, 3, 5$ 

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímek $y = 0$ a $x = 1$.

od ideálního stavu, který žádá nalézt *všechna* maximální řešení rovnice, neboť o tom, zda jsme opravdu získali všechna maximální řešení, nic nevíme. Nebezpečí formálního postupu ukazuje následující příklad:

Příklad 2.4.1. Řešte rovnici

$$y' = 2\sqrt{y} \quad (2.19)$$

a nalezněte všechna (maximální) řešení, která splňují podmínku

$$(a) y(0) = -1; \quad (b) y(1) = 0; \quad (c) y(4) = 1.$$

Jde tedy o tři Cauchyho úlohy, lišící se počáteční podmínkou.

Řešení, které by vyhovovalo podmínce (a), neexistuje. Obecněji, žádným bodem poloroviny $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y < 0\}$ neprochází řešení rovnice (2.19). Všimněte si, že formálně získaná řešení

$$y(x) = (x - C)^2, \quad C \in \mathbb{R},$$

nejdou řešeními na rovnici (2.19) na \mathbb{R} , protože řešením musí být vždy *neklesající funkce*. Také zřejmé identicky nulové řešení bychom pro žádné $C \in \mathbb{R}$ odtud nezískali.

Při zvoleném $C \in \mathbb{R}$ je (maximálním) řešením funkce

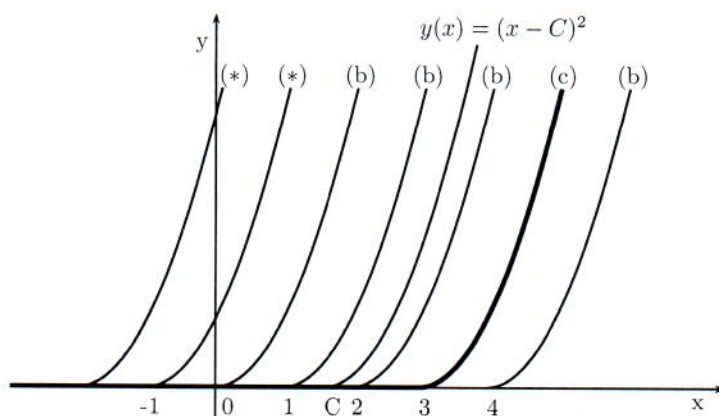
$$y_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, C), \\ (x - C)^2 & \text{pro } x \in [C, +\infty); \end{cases}$$

viz Obr. 2.2. Dalším maximálním řešením je funkce $y \equiv 0$. Protože je $y'(C) = 0 = 2\sqrt{y(C)}$, musíme dokázat, že pro popsaná řešení skutečně $y'(C) = 0$. Snadno však nahlédneme, že y je spojitá funkce v bodě C a že $y'_-(C) = 0$. Je zřejmé

$$\lim_{x \rightarrow C+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow C+} 2(x - C) = 0 = y'_+(C),$$

takže $y'_-(C) = y'_+(C) = 0$, což jsme potřebovali dokázat. Kromě těchto již nalezených (maximálních) řešení žádná další maximální řešení neexistují.

Pro $C = 3$ dostaneme požadované maximální řešení pro které je $y(4) = 1$. Na Obr. 2.2 jsou schematicky znázorněna některá řešení.



Obr. 2.2

Symbolem (*) jsou označena ta řešení rovnice, která *nevývohují* podmínce (b), všechna ostatní řešení načrtnutá v Obr. 2.2 podmínce (b) vyhovují, ale pouze jediné z nich vyhovuje podmínce (c). To je označeno (c) a jeho graf je zvýrazněn.

KUCHAŘKA NA ŘEŠENÍ ODR

Na základě poznámek ze cvičení zpracoval

Vojtěch Krejčířík

korrektury Petra Suková

Na začátek několik věcí, na které v žádném případě nezapomenout. Řešením ODR je funkce ji splňující a interval, na kterém platí, proto vždy uvést INTERVAL, a to maximální možný. Pokud je zadána počáteční podmínka, musí ležet v intervalu. Při integrování také nezapomínejte na integrační KONSTANTU!

Formální zápis derivace: $y' = \frac{dy}{dx}$.

I. Separace proměnných

Předpis

$$y' = g(y) h(x).$$

Pokud $g(C_0) = 0$ kde $h(x)$ má smysl, existuje řešení

$$y = C_0.$$

Mám ošetřeno a můžu dělit

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x) dx,$$

Prímou integrací dostanu řešení. Pozor na možné napojení na konstantní řešení. Aby bylo možné, je třeba aby v bodě x_0 , kde k napojení dojde, platilo:

$$f(x_0) = C_0, f'(x_0) = 0.$$

25

|| Příklad:

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$$

Zřejmě $D(f) = (0, \infty)$. Funkce $y = 0$ je řešením rovnice.

Separuji proměnné a zintegruji

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{x} + C.$$

Vyjádřím y , pozor, umocněním přidám jedno řešení.

$$y = (\sqrt{x} + C)^2.$$

Následuje diskuze vzhledem ke konstantě C .

1. $C > 0$: Nelze napojit, funkce má na tvar

$$y = (\sqrt{x} + C)^2, \quad D(f) = (0, \infty).$$

2. $C < 0$: Lze napojit na konstantní řešení. Ovšem nelze použít

$y = (\sqrt{x} + C_1)^2$ na $(0, C_1^2)$, protože $y' < 0$, nesouhlasí se zadáním, je to řešení přidané umocněním.

Řešení tedy zapíšeme takto :

a) $y = 0$ na $D(f)$.

b) $y = (\sqrt{x} + C_1)^2$ na $D(f)$, kde $C_1 \in \mathbb{R}$.

c) $y = 0$ na $(0, C_2^2)$, $y = (\sqrt{x} + C_2)^2$ na (C_2^2, ∞) , kde $C_2 < 0$.

II. Rovnice homogenní a ty, které na ně lze převést

Předpis

$$y' = f(y, x).$$

a) Pokud pro funkci $f(y, x)$ platí : $f(ty, tx) = f(y, x)$, to znamená, že y a x vystupují přímo v podílu, lze zavést substituci

$$y = z(x)x,$$

$$y' = z'(x)x + z(x),$$

kteřou rovnicí převedu do tvaru separovaných proměnných.

Příklad:

$$y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}.$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nulové řešení neexistuje, zavedu výše uvedenou substituci

$$z'x + z = z - e^z,$$

z se odečtou a zůstane rovnice ve tvaru separovaných proměnných, kterou už umím řešit.

$$\int \frac{dz}{e^z} = - \int \frac{dx}{x}.$$

$$-e^{-z} = -\ln|x| + C.$$

$$e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C.$$

$$y = -x \ln(C + \ln|x|).$$

b) Funkce na pravé straně je ve tvaru

$$f(y, x) = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}.$$

2c)

3. $y' = \sqrt[3]{y}$. Opět viz Poznámku 3, $g(y) = \sqrt[3]{y}$ a $h(x) = 1$.

1. krok

Zřejmě $I = \mathbb{R}$.

2. krok

g je definována všude (tj. na \mathbb{R}), nulová je pouze v 0 (tedy máme řešení $y \equiv 0$) a tedy máme intervaly $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, \infty)$.

3. krok

Integrujme:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y(x)}} = 1,$$

tedy

$$\frac{3}{2}y(x)^{\frac{2}{3}} = x + c.$$

4. krok

Vidíme, že bez ohledu na znaménko y musí být $x + c > 0$, tedy $x \in (-c, \infty)$. Je-li $y < 0$ (tj. uvažujeme J_1), pak $y = -\left(\frac{2}{3}(x + c)\right)^{\frac{3}{2}}$. Je-li $y > 0$, pak $y = \left(\frac{2}{3}(x + c)\right)^{\frac{3}{2}}$.

5. krok

Vidíme, že v obou případech je $\lim_{x \rightarrow (-c)^+} \pm \left(\frac{2}{3}(x + c)\right)^{\frac{3}{2}} = 0$, tedy zde můžeme přilepit nulové řešení. Celkem dostaneme řešení

$$y_{1,2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ \pm \left(\frac{2}{3}(x + c)\right)^{\frac{3}{2}}, & x > c. \end{cases}$$

└ A nesmíme zapomenout, že navíc ještě máme singulární řešení $y_3(x) = 0$.

4. $xy' - y \left(1 + \log \frac{y}{x}\right) = 0$. Vidíme, že pro $x = 0$ to nedává smysl, a tedy ani žádné řešení nemůže nulou procházet. Tedy zadanou rovnici můžeme podělit x . Dostaneme

$$y' = \frac{y}{x} \left(1 + \log \frac{y}{x}\right). \quad (3)$$

Jedná se tedy o homogenní rovnici, a tedy použijeme substituci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Pak $y(x) = xz(x)$, a tedy $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Dosadíme do (3):

$$z + xz' = z(1 + \log z)$$

Tedy po úpravě (již víme, že x můžeme podělit):

$$z' = \frac{1}{x}z \log z$$

To už je rovnice se separovanými proměnnými, a tedy můžeme postupovat podle Poznámky 3.

1. krok

Vidíme, že pro $x = 0$ to není definované, a tedy máme dva intervaly $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$.

Řešení:

1. $y' = |x|$. Zde jde o prosté nalezení primitivní funkce. Na intervalu $(0, \infty)$ máme primitivní funkce $\frac{x^2}{2} + c$, a na $(-\infty, 0)$ funkce $-\frac{x^2}{2} + d$. Je vidět, že abychom tato řešení mohli v nule slepit pomocí Věty 1 je třeba, aby $c = d$. Tedy dostáváme řešení

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + c, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x^2}{2} + c, & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

pro libovolné $c \in \mathbb{R}$. Můžeme to zapsat také jako $y(x) = \frac{1}{2}x|x| + c$.

- (2d) || 2. $y' = yx$. Postupujeme podle Poznámky 3. Označme $g(y) := y$ a $h(x) := x$.

1. krok

Zjevně je funkce x definovaná na \mathbb{R} , tedy $I := \mathbb{R}$.

2. krok

Funkce g je nulová pouze pro $y = 0$, tedy máme jedno stacionární řešení $y(x) = 0$.

Funkce g je definovaná všude, a nenulová je pro intervaly $J_1 := (-\infty, 0)$ a $J_2 := (0, \infty)$.

3. krok

Integrujme!

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x,$$

tedy díky větě o substituci

$$\log |y(x)| = \frac{x^2}{2} + c.$$

4. krok

Nejprve se zbavíme logaritmu.

$$|y(x)| = e^{\frac{x^2}{2} + c} = e^c e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Abychom si zjednodušili zápis, označme $d := e^c$. Konstanta $c \in \mathbb{R}$ byla libovolná, tedy $d > 0$ bude libovolné.

Nyní se chceme zbavit absolutní hodnoty, a pro to už musíme rozlišit, jestli řešíme případ kdy $y(x) \in J_1 = (-\infty, 0)$ nebo $y(x) \in J_2 = (0, \infty)$.

Tedy, na $(0, \infty)$ máme $y = de^{\frac{x^2}{2}}$. A vidíme, že pro každé c je $y(x) = e^{\frac{x^2}{2} + c} > 0$.

Obdobně na J_2 dostáváme pro každé $c \in \mathbb{R}$ řešení $y(x) = -de^{\frac{x^2}{2}}$.

5. krok

Jelikož řešení $\pm de^{\frac{x^2}{2} + c}$ jsou nenulová, není možné navázat na singulární řešení, a tedy se lepit nebude a všechna řešení dostaneme jako

$$y(x) = de^{\frac{x^2}{2}},$$

kde d je libovolné reálné číslo. (Tím, že d volíme libovolné reálné pokryjeme všechny možnosti. Singulární řešení dostaneme pro volbu $d = 0$.)

13.1.4 (Postup při řešení (13.2)). Necht f, h jsou spojité funkce reálné proměnné. Při hledání maximálních řešení rovnice (13.2) postupujeme následujícím způsobem.

- (1) Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v $\mathcal{D}(h)$.
- (2) Najdeme všechny nulové body funkce g . Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (13.2). Těmto řešením se říká **singulární** nebo také **stacionární**.
- (3) Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je g nenulová.
- (4) Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je spojitá na I a g je spojitá a nenulová na J . Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J . Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Necht H je primitivní funkce k h na I a G je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g}$ na J . Existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že platí $G(y(x)) = H(x) + c$ na definičním oboru řešení y , který nalezneme v následujícím kroku.

- (5) Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I; H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c).$$

(Zde G^{-1} je inverzní funkce ke G . Existuje, protože G je intervalu J buď rostoucí nebo klesající.)

- (6) Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení pomocí Věty 13.1.2.



13.1.5. Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

Řešení. V tomto případě máme v rovnici (13.2) $h(x) = 1$ a $g(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

- (1) Protože $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$, budeme řešení hledat na \mathbb{R} .
- (2) Nulové body funkce g jsou 1 a -1 . Tedy $y = 1$ a $y = -1$ jsou stacionárními řešeními naší rovnice.
- (3) Maximální otevřený interval, kde je g nenulová, je $(-1, 1)$. Budeme tedy hledat řešení s hodnotami v tomto intervalu.

- (4) Je-li y řešení s hodnotami v $(-1, 1)$, platí

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1-y^2(x)}} = 1.$$

Primitivní funkce k levé straně je $\arcsin y(x)$ a primitivní funkce k pravé straně je x . Existuje tedy konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\arcsin y(x) = x + c.$$

- (5) Protože hledáme řešení s hodnotami v $(-1, 1)$, pro pevné $c \in \mathbb{R}$ máme

$$y_c(x) = \sin(x + c), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right).$$

- (6) Lepením singulárních řešení s řešeními z bodu 5 dostaneme pro pevné $c \in \mathbb{R}$ maximální řešení

$$y_c(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2} - c\right], \\ \sin(x + c), & x \in \left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right), \\ 1, & x \in \left[\frac{\pi}{2} - c, \infty\right) \end{cases}$$

(2g) úzce)

(2g) ||

13.1.6. Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = x \sqrt[3]{y^2}$.

Řešení. Zadaná rovnice je tvaru (13.2), kde $h(x) = x$ a $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$.

- (1) Protože $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$, budeme hledat řešení na \mathbb{R} .
- (2) Nulový bod funkce g je 0, tedy $y = 0$ je stacionární řešení.
- (3) Maximální otevřené intervaly, kde je g nenulová, jsou $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
- (4) Je-li y řešení s hodnotami v intervalu $(-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$, platí pro něj rovnost

$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y^2}} = x.$$

Primitivní funkce k levé straně je $G(y) = 3y^{\frac{1}{3}}(x)$, primitivní funkce k pravé straně je $H(x) = \frac{x^2}{2}$. Existuje tedy konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$3y^{\frac{1}{3}}(x) = \frac{x^2}{2} + c.$$

- (5) Vezměme nyní $c \in \mathbb{R}$ pevné. Pro intervaly $J = (0, \infty)$ a $J = (-\infty, 0)$ hledáme otevřený interval I_c takový, že $\frac{x^2}{2} + c \in J$ pro $x \in I_c$.

- Necht' $J = (0, \infty)$. Pak výše uvedený požadavek dává tři možnosti:



$$- c > 0, I_c = \mathbb{R} \text{ a } y_c(x) = \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3,$$

$$- c \leq 0, I_c = (-\infty, -\sqrt{-2c}) \text{ a } y_c(x) = \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3,$$

$$- c \leq 0, I_c = (\sqrt{-2c}, \infty) \text{ a } y_c(x) = \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3.$$

- Necht' $J = (-\infty, 0)$. Hledáme otevřený interval I_c takový, že $\frac{x^2}{2} + c \subset (-\infty, 0)$ pro $x \in I_c$. Toto je možné pouze pro $c < 0$.

$$\text{Pak } I_c = (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}) \text{ a } y_c(x) = \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3.$$

- (6) Nalezená řešení z bodu (5) a (2) nyní lze lepit dohromady v bodech osy x , protože

$$\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{-2c}} \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3 = 0.$$

To nám dává následujících devět různých typů maximálních řešení:

- $y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$,
- $y(x) = \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, x \in \mathbb{R}$, pro $c > 0$.
- pro $c \leq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2c}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c \leq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}], \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c \leq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}], \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c}, \infty). \end{cases}$$



- pro $c_1, c_2, c_2 \leq 0, c_1 \geq c_2 \geq c_3$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_1}, -\sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_2}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_3}], \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2c_3}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2 \leq 0, c_1 \geq c_2$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2c_1}, -\sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_2}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2 \geq 0, c_1 \geq c_2$,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2 \geq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty). \end{cases}$$

13.1.7. Příklad. Necht $p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' + p(x)y = 0$.

Požadujeme-li, aby řešení splňovalo rovnost $y(x_0) = y_0$ pro nějakou dvojici $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, mluvíme o *počáteční podmínce*.

Začneme s typem rovnic, k jejichž řešení nepotřebujeme o mnoho více než ovládat některé metody hledání primitivních funkcí.

§29. Rovnice se separovanými proměnnými. K základním dovednostem patří řešení diferenciálních rovnic tvaru

$$(SP) \quad y' h(y) = g(x),$$

kterým se říká „rovnice se separovanými proměnnými“. Předpokládejme, že funkce $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ a $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité na otevřených intervalech J a I . Metoda řešení rovnice (SP) je založena na pozorování, že každé řešení $y = y(x)$ definované na otevřeném intervalu $I_0 \subset I$ s hodnotami v J musí pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ splňovat na intervalu I_0 rovnici

$$H(y(x)) = G(x) + c,$$

kde $H'(y) = h(y)$ pro $y \in J$, $G'(x) = g(x)$ pro $x \in I$. Naopak, má-li nějaká funkce y vlastní derivaci na I a splňuje-li uvedenou rovnici, pak je řešením. Je-li H prostá na otevřeném intervalu $J_0 \subset J$ (například pokud funkce h nenabývá na J_0 hodnoty 0), pak všechna maximální řešení (SP) s hodnotami v J_0 jsou tvaru $y_c(x) = H_0^{-1}(G(x) + c)$ na maximálních otevřených intervalech obsažených v $U_c = (G + c)^{-1}(H_0(J_0))$, kde H_0 je restrikce H na J_0 .

Jak použít toto tvrzení (či pozorování) si ukážeme na řešení konkrétních příkladů. Také ukážeme, jak lze některé úlohy, které nejsou tvaru (SP) řešit pomocí úloh, které tvar (SP) mají.

Poznámky.

1. Výše naznačený postup řešení ukazuje, že k řešení („integrování“) rovnice ve tvaru (SP) je potřeba především najít primitivní funkce k funkcím g a h .

2. Jak uvidíme v §31, rovnice se separovanými proměnnými ve tvaru (SP) jsou speciálním případem rovnic v exaktním tvaru.

P ř í k l a d Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' y = x^3.$$

Řešení. Funkce $g(x) = x^3$ a $h(y) = y$ jsou spojité na \mathbb{R} . Najdeme nějaké primitivní funkce k funkcím g a h na \mathbb{R} . Jsou to například funkce $G(x) = \frac{1}{4}x^4$ a $H(y) = \frac{1}{2}y^2$. Funkce y definovaná na otevřeném intervalu I je tudíž řešením naší rovnice, právě když má všude v I vlastní derivaci a existuje takové $c \in \mathbb{R}$, že

$$(*) \quad \frac{1}{2}(y(x))^2 = \frac{1}{4}x^4 + c, \quad x \in I.$$

Funkce H ovšem není prostá na \mathbb{R} , maximální otevřené intervaly, na nichž je prostá, jsou $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, +\infty)$. Hledejme nejprve řešení s hodnotami v J_1 nebo

v J_2 . Protože obrazem každého z intervalů J_1 a J_2 při funkci H je interval $(0, +\infty)$, plyne z (*), že řešení s hodnotami v J_1 nebo J_2 jsou definována na intervalech obsažených v množině $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{4}x^4 + c > 0\}$. To jsou intervaly:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} & \quad \text{pro } c > 0, \\ (-\infty, 0) \text{ a } (0, +\infty) & \quad \text{pro } c = 0, \\ (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}) \text{ a } (\sqrt[4]{-4c}, +\infty) & \quad \text{pro } c < 0. \end{aligned}$$

Na těchto intervalech mají tedy řešení tvar

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2c} \quad \text{nebo} \quad y(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2c}.$$

Zbývá zjistit, zda tato řešení jsou maximální, a případně z nich maximální řešení poslepuvat.

Řešení příslušná $c > 0$ jsou maximální, protože jsou definována na celém \mathbb{R} , a není je proto možné již prodloužit. Uvažme dále řešení příslušná $c < 0$. Ta jsou definována na intervalech $(-\infty, -\sqrt[4]{-c})$ a $(\sqrt[4]{-c}, +\infty)$. Jeden krajní bod je $-\infty$ nebo $+\infty$, a tedy příslušným směrem řešení prodloužit nelze. V druhém krajním bodě má řešení limitu 0, a tudíž případné prodloužení tam musí mít hodnotu 0. Z rovnice ovšem plyne, že hodnoty 0 může řešení nabývat jen v bodě $x = 0$. To však není náš případ, a tedy i řešení příslušná $c < 0$ jsou maximální.

Zbývá prozkoumat řešení příslušná $c = 0$. To jsou řešení

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in (0, +\infty); & y_2(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in (0, +\infty); \\ y_3(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in (-\infty, 0); & y_4(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in (-\infty, 0). \end{aligned}$$

Všetchna tato řešení mají v bodě 0 limitu 0 (pro y_1 a y_2 uvažujeme limitu zprava, pro y_3 a y_4 limitu zleva), proto funkce, která bude definována jako y_3 nebo y_4 na $(-\infty, 0)$, jako 0 v bodě 0 a jako y_1 nebo y_2 na $(0, +\infty)$ bude řešením naší rovnice v případě, že v bodě 0 bude mít vlastní derivaci. (Pak má totiž vlastní derivaci v každém bodě \mathbb{R} , na $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ rovnici splňuje, protože se tam shoduje s nějakým řešením, a v bodě 0 ji splňuje též, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením.) V našem případě pro všechny čtyři kombinace vyjde v 0 derivace 0 (například proto, že „slepené“ funkce jsou v bodě 0 spojité a všechny z funkcí y_1, \dots, y_4 mají v bodě 0 z příslušné strany limitu derivace rovnu 0). Dostáváme tedy čtyři maximální řešení:

$$\begin{aligned} y_1^m(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in \mathbb{R}; & y_2^m(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in \mathbb{R}; \\ y_3^m(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}x|x|, \quad x \in \mathbb{R}; & y_4^m(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x|x|, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Všechna maximální řešení jsou tudíž tato čtyři a výše spočtená řešení příslušná $c \neq 0$ (pro $c > 0$ je to jedno řešení definované na \mathbb{R} , pro $c < 0$ dvě řešení definovaná na menších intervalech). ■

Příklad Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' \cos y = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{\cos^2 x}$ není definována v bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Navíc si všimněme, že rovnice nemůže být splněna, pokud $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro každé řešení $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ musí proto platit $I \subset I_k$ a $y(I) \subset I_n$ pro nějaká $k, n \in \mathbb{Z}$, kde $I_k = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Uvažujme $k, n \in \mathbb{Z}$ pevná.

Označme g_k restrikcí funkce $\frac{1}{\cos^2 x}$ na I_k a h_n restrikcí funkce $\cos y$ na I_n . Najdeme nějaké primitivní funkce $G_k: I_k \rightarrow \mathbb{R}$ ke g_k a $H_n: I_n \rightarrow \mathbb{R}$ k h_n . Např. $G_k(x) = \operatorname{tg} x$ pro $x \in I_k$ a $H_n(y) = \sin y$ pro $y \in I_n$. Řešíme nyní pro $c \in \mathbb{R}$ úlohu najít všechny funkce $y = y(x)$ definované na maximálním možném otevřeném intervalu $I \subset I_k$ s hodnotami v I_n tak, aby byla splněna rovnost $\sin y(x) = \operatorname{tg} x + c$ pro $x \in I$. Nutně musí být $\operatorname{tg} x + c \in (-1, 1)$, a tedy $x \in (k\pi + \operatorname{arctg}(-1 - c), k\pi + \operatorname{arctg}(1 - c))$. Řešíme-li rovnici $\sin y_{k,c,n}(x) = \operatorname{tg} x + c$, pro $x \in I_k$ a $y_{k,c,n}(x) \in I_n$, dostáváme, že

$$y_{k,c,n}(x) = n\pi + (-1)^n \arcsin(\operatorname{tg} x + c)$$

na intervalu $(k\pi + \operatorname{arctg}(-1 - c), k\pi + \operatorname{arctg}(1 - c))$ jsou všechna maximální řešení dané rovnice. ■

Příklad Popište všechna neomezená maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{y^2}{1 + x^2}.$$

Řešení. Rovnice není ve tvaru uvedeném na začátku tohoto paragrafu. Budeme-li se ovšem zajímat o řešení (ne nutně maximální) $y: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, která na (a, b) nenabývají hodnotu nula, můžeme zřejmě řešit rovnici $y' \frac{1}{y^2} = \frac{1}{1+x^2}$. Výše popsaná metoda vede na rovnici

$$-\frac{1}{y} = \operatorname{arctg} x + c, \text{ kde } c \in \mathbb{R}.$$

Pokud je tedy pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ funkce $\operatorname{arctg} x + c$ nenulová na intervalu (a, b) , je funkce $y(x) = -\frac{1}{\operatorname{arctg} x + c}$ řešením naší rovnice na tomto intervalu. Vrátime-li se k naší původní rovnici, povšimneme si, že identicky nulová funkce je jejím řešením. Dále si povšimneme, že žádné z nenulových řešení nemá ani v jednom krajním bodě limitu nula. Proto neexistuje řešení, které se rovná nulovému řešení na nějakém intervalu a jinému řešení na jiném intervalu (zkuste si to promyslet podrobně). Pro

3a

$$y' = x e^x y$$

$$y(1) = 1$$

$$I_1 = (-\infty, 0)$$

$$I = \mathbb{R}$$

Stac. $y \equiv 0$

$$I_2 = (0, \infty)$$

$G(y)$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x e^x dx$$

Per. p. $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$

$$\begin{matrix} u & v' \\ u'=1 & v=e^x \end{matrix} = x e^x - e^x$$

$\leftarrow H(x)$
 $\ln|y| = x e^x - e^x + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$|y| = \lambda e^{x e^x - e^x}$$

$$\lambda > 0$$

$$G(I_1) = \mathbb{R}$$

$$G(I_2) = \mathbb{R}$$

$$y = \lambda e^{e^x(x-1)}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

podam:

$$y(1) = 1$$

stac. melzo, stacit talny ne

$$1 = y(1) = \lambda e^{e^1(1-1)}$$

$$\lambda = 1$$

paž

$$y = e^{e^x(x-1)}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

3b) $y'(1+y^2) = 1+y^2$

$I = \mathbb{R} \quad J = \mathbb{R}$

heimo' stac. Resem'

$-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \xi < \frac{\pi}{2}$

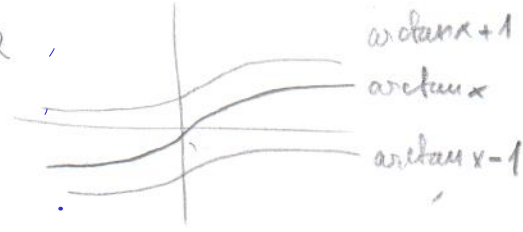
$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{1+x^2} dx \quad h(x)$

$G(y)$

$\arctan y = \arctan x + \xi \quad \xi \in \mathbb{R}$

$y = \tan(\arctan x + \xi)$

$\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



da'vor smysl je u pro $-\pi < \xi < \pi$

$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan x + \xi \leq \frac{\pi}{2} \leftarrow$

$\tan(-\xi - \frac{\pi}{2}) \leq x \leq \tan(\frac{\pi}{2} - \xi)$

Začet

$y = \tan(\arctan x + \xi) \quad 0 < \xi < \pi \quad x \in (-\infty, \tan(\frac{\pi}{2} - \xi))$

$0 > \xi > -\pi \quad x \in (\tan(\frac{\pi}{2} - \xi), \infty)$

$y = \tan(\arctan x) = x \quad \xi = 0 \quad x \in \mathbb{R}$

nelze složit

3c

$$y' = \sin x \sin y$$

$$y(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$J_n = (0, \pi) + n\pi$$

bede was zajiwan
Jo (sin pc. (pi))

inlove body: $\sin y = 0 \quad y = n\pi, k \in \mathbb{Z}$

orly $\int \frac{1}{\sin y} dy = \int \sin x dx$

$$\int \frac{1}{\sin y} = \int \frac{\sin y}{1 - \cos^2 y} dy = \int \frac{-1}{1 - z^2} dz$$

$$-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos y}{1 - \cos y} \right| = -\cos x + k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = \cos y \\ dz = -\sin y dy$$

$\in (0, \pi)$ na $J_n + n \rightarrow x \in \mathbb{R}$

$$\ln \left| \frac{1 + \cos y}{1 - \cos y} \right| = 2\cos x + k$$

$$\left| \frac{1 + \cos y}{1 - \cos y} \right| = e^k e^{2\cos x}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos y}{1 - \cos y} \right|$$

$$\cos y \neq 1 \rightarrow y \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1 + \cos y}{1 - \cos y} = k e^{2\cos x}$$

$k > 0$ \rightarrow bedemo pat k misto $e^k, k > 0$

$$1 + \cos y = k e^{2\cos x} - \cos y k e^{2\cos x}$$

$$\cos y (1 + k e^{2\cos x}) = k e^{2\cos x} - 1$$

$$\cos y = \frac{k e^{2\cos x} - 1}{k e^{2\cos x} + 1} \quad k e^{2\cos x} + 1 \neq 0$$

$$y = \arccos \frac{k e^{2\cos x} - 1}{k e^{2\cos x} + 1}$$

$$-1 \leq \frac{k e^{2\cos x} - 1}{k e^{2\cos x} + 1} \leq 1$$

kontrola

bez prevest: $-1 \leq \frac{t-1}{t+1} < 1$

$t+1 > 0 \quad t-1 \leq t-1 \leq t+1$ body pro $k > 0$ ok
 $0 \leq 2t$

$t+1 < 0 \quad -t-1 \geq t-1 \geq t+1$ nelze

tedy $y = \arccos \frac{k e^{2\cos x} - 1}{k e^{2\cos x} + 1}$ $k > 0$

nebo $y = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Podmínka: $y(0) = \frac{\pi}{2}$ $y = 2\pi$ nelze

$$\arccos \frac{k e^2 - 1}{k e^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{k e^2 - 1}{k e^2 + 1} = 0$$

$$k = \frac{1}{e^2}$$

Závěr: $y(x) = \arccos \frac{\frac{1}{e^2} e^{2\cos x} - 1}{\frac{1}{e^2} e^{2\cos x} + 1}$ $x \in \mathbb{R}$

4a $y' = x \sqrt[3]{1-y} \rightarrow f(y)$
 $I = \mathbb{R}$ $h(x)$ \mathbb{R}

$y_0 \equiv 1$ na \mathbb{R}

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-y}} dy = \int x dx$$

$f(y) \neq 0$ na $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) = \mathbb{J}$

$$-\frac{3}{2}(1-y)^{2/3} = \frac{1}{2}x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[3]{(1-y)^2} = -\frac{x^2}{3} + c \rightarrow \text{musi beft } > 0$$

$\neq 0$ $(1-y)^2 = (c - \frac{x^2}{3})^3$

$$(1-y) = \pm \sqrt{(c - \frac{x^2}{3})^3}$$

$$1 \pm \sqrt{(c - \frac{x^2}{3})^3} = y \quad c \in \mathbb{R} \quad ; \quad c = \frac{x^2}{3} \quad \sqrt{3c} \geq |x|$$

Kasbor: $\bullet c \leq 0$ melze (prazduj/1 bodoryj claf. ofon)

$\bullet c > 0 \rightarrow x < \sqrt{3c}$
 $\rightarrow x > -\sqrt{3c}$ $x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c})$

\bullet pro $x \rightarrow \pm \sqrt{3c}$ dostavame $\lim_{x \rightarrow \pm \sqrt{3c}} 1 \pm \sqrt{(c - \frac{x^2}{3})^3} = 1$

\rightarrow buclena lepit

cestem

$y_0 \equiv 1 \quad x \in \mathbb{R}$

$$y_1 = \begin{cases} 1 & x \geq \sqrt{3c} \\ 1 + \sqrt{(c - \frac{x^2}{3})^3} & x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c}) \\ 1 & x \leq -\sqrt{3c} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & x \geq \sqrt{3c} \\ 1 - \sqrt{(c - \frac{x^2}{3})^3} & x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c}) \\ 1 & x \leq -\sqrt{3c} \end{cases}$$

$$2b \quad y' = x\sqrt{y}$$

$$f(y) = \sqrt{y}$$

$$g(x) = x$$

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R} = I$$

$$(2) \quad y_0 = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(3) \quad y \neq 0 \quad \text{me} \quad (0, \infty) = J$$

$$(4) \quad \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int x dx$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + k \rightarrow \text{musi } k \geq 0$$

$$(G(J)) = (0, \infty)$$

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2$$

$$2\sqrt{y} (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

$$\frac{x^2}{4} + k > 0$$

$$x^2 > -4k$$

$$|x| > \sqrt{-4k}$$

(5) Rozbor:

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2, \quad k > 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad k \leq 0$$

$$x > \sqrt{-4k}$$

$$x \in (\sqrt{-4k}, \infty)$$

$$-\sqrt{-4k}$$

$$\sqrt{-4k}$$

$$x < -\sqrt{-4k}$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{-4k})$$

(6) Závěr:

$$y_0 = 0$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y_1 = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{pro } k > 0$$

(nelze slepiti,
nemc je max.)

$$y_2 = \begin{cases} 0 \\ \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{-4k}]$$

$$k \leq 0$$

$$x \in (-\sqrt{-4k}, \infty)$$

$$y_3 = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \\ 0 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{-4k})$$

$$x \in [\sqrt{-4k}, \infty)$$

$$y_4 = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \\ 0 \\ \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{-4k})$$

$$[-\sqrt{-4k}, \sqrt{-4k}]$$

$$(\sqrt{-4k}, \infty)$$

4)

$$y' \sin x = 2y \ln y$$

"jažo" $y' = \underbrace{2y \ln y}_{g(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{h(x)} \rightarrow x \in (0 + k\pi, \pi + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

↳ nulové body $y=0 \rightarrow$ nelze zúžit logaritmu
 $y=1 \rightarrow \begin{matrix} \downarrow = (0, 1) \\ \downarrow = (1, \infty) \end{matrix}$

$$\int \frac{1}{2y \ln y} dy = \int \frac{1}{\sin x} dx \rightarrow \text{rychlost minul (5d)}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \ln |\ln y|}_{G(y)} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + C \quad C \in \mathbb{R}$$

↳ $\cos x \neq 1 \quad x \neq 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
 $\cos x \neq -1 \quad x \neq \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$G(0, 1) = \mathbb{R}$$

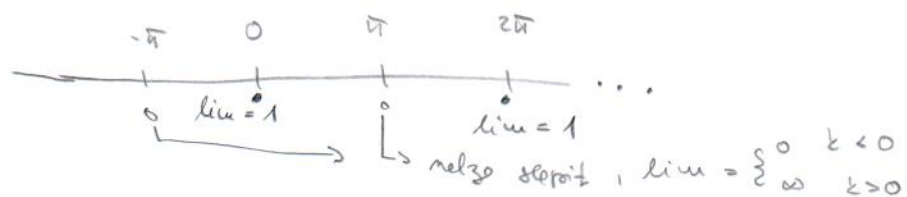
$$G(1, \infty) = \mathbb{R}$$

$$\ln |\ln y| = \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + C$$

$$|\ln y| = \underbrace{e^k}_{> 0} \cdot \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right|$$

$$\ln y = \underbrace{e^k}_{\in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)$$

okrajšie $\mathbb{Z}_k(x) := y = e^{e^k \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)} \quad e \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$



$$x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

$$x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Zähler

$$f_0 \equiv 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_1 = \begin{cases} 1 \\ z_c(x) \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, 2k\pi] \\ x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

$$k \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f_2 = \begin{cases} z_c(x) \\ 1 \end{cases}$$

$$x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \\ x \in [2\pi + 2k\pi, \infty)$$

$$k \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f_3 = \begin{cases} z_{c_1}(x) \\ 1 \\ z_{c_2}(x) \end{cases}$$

$$x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \\ x \in [2\pi + 2k\pi, 2\pi + 2l\pi] \\ x \in (2\pi + 2l\pi, 3\pi + 2l\pi)$$

$$k, l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ k, l \in \mathbb{Z}$$

2A

$$y' = \underbrace{x e^{-y}}_{h(x)} \underbrace{\sqrt[3]{e^y - 1}}_{g(y)}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y_0 \equiv 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g \neq 0 \quad \text{na } (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{J}$$

$$\int \frac{e^y}{\sqrt[3]{e^y - 1}} dy = \int x dx$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{(e^y - 1)^2} = \frac{x^2}{2} + k$$

$\in (0, \infty)$

$$\sqrt[3]{(e^y - 1)^2} = \frac{x^2}{3} + k \quad \rightarrow \text{musí být } > 0$$

$$(e^y - 1)^2 = \left(\frac{x^2}{3} + k\right)^3$$

! pozor při odmocňování

$$e^y = 1 \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{3} + k\right)^3} > 0$$

rozbor

$$y = \ln \left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{3} + k\right)^3} \right) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$k > 0$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{3k}) \rightarrow$$

$$x \in (\sqrt{3k}, \infty) \rightarrow$$

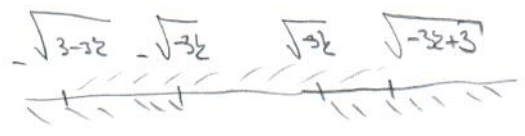
$$\rightarrow y = \ln \left(1 + \sqrt{\left(\frac{x^2}{3} + k\right)^3} \right)$$

pro

$$\ln \left(1 - \sqrt{\left(\frac{x^2}{3} + k\right)^3} \right)$$

mažeme:

$$k \leq 0:$$



$$\begin{aligned} &> 0 \\ 1 &> \frac{x^2}{3} + k \\ 3 - 3k &> x^2 > 0 \end{aligned}$$

tedy fungují pro

$$|k| < 1$$

tedy $0 < k < 1$

pro $k \leq 0$

$$y = \ln \left(1 - \sqrt{\left(\frac{x^2}{3} + k\right)^3} \right), \quad x \in (-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k})$$

$$x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{3k})$$

$$x \in (\sqrt{3k}, \sqrt{3-3k})$$

Bez Opeu:

$$y_0 = 0$$

$$x \in \mathbb{R};$$

$$y_1 = \ln(1 + \sqrt{\quad}) \quad x \in \mathbb{R}, k > 0$$

$$y_2 = \ln(1 - \sqrt{\quad}) \quad x \in (-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k}); k \in (0, 1)$$

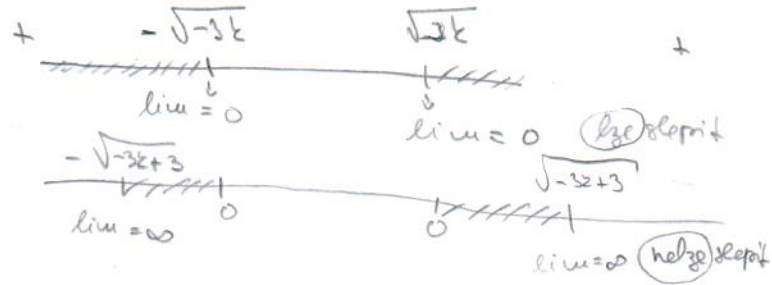
↳ nely slopit, $\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{3-3k}} = \infty$

lepeni

spuacne

$$z_k^+(x) = \ln(1 + \sqrt{\quad}) \quad k \leq 0;$$

$$z_k^-(x) = \ln(1 - \sqrt{\quad})$$



Kombinace: nely $k \leq 0 \quad \ell \leq 0$

$$y = \begin{cases} z_k^+(x) & x \in (-\infty, -\sqrt{3k}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^-(x) & (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, \sqrt{3k}] \\ z_k^+(x) & x \in (\sqrt{3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0 & (-\infty, \sqrt{-3k}] \\ z_k^-(x) & (\sqrt{-3k}, \sqrt{3-3k}) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^+ & x \in (-\infty, -\sqrt{3k}) \\ 0 & [-\sqrt{3k}, \sqrt{3k}] \\ z_k^+ & (\sqrt{3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^+ & x \in (-\infty, -\sqrt{3k}) \\ 0 & [-\sqrt{3k}, \sqrt{3k}] \\ z_k^- & (\sqrt{3k}, \sqrt{3-3k}) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^- & x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{3k}) \\ 0 & [-\sqrt{3k}, \sqrt{3k}] \\ z_k^- & (\sqrt{3k}, \sqrt{3-3k}) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^- & x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \sqrt{-3k}] \\ z_k^+ & (\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases}$$

Chapter 3

Applications of first-order ODEs

Contents

3.1	Radioactivity and Carbon dating	25
3.2	Population growth models	28
3.3	Newton's law of cooling	32
3.4	Mixing problems	32
3.5	First-order model of supply and demand	35



3.1 Radioactivity and Carbon dating

There are three isotopes of Carbon: ^{12}C , ^{13}C and ^{14}C . Almost all Carbon is made up of the first two (^{12}C and ^{13}C) because ^{14}C is radioactive: it decays with a half-life of 5730 years to form ^{14}N . Although it decays quite quickly, it is constantly being produced in the upper atmosphere by the action of cosmic rays. The equilibrium level of ^{14}C is about 1 part per trillion (10^{12}).

When an organism dies, it ceases to absorb Carbon from the environment, so the amount of ^{14}C it contains will decrease as this decays radioactively. The time since the death of the organism can be estimated by measuring how much ^{14}C there is left.

Let $x(t)$ be the proportion of ^{14}C at time t . In a short interval δt , the concentration will decrease by an amount proportional to how much is left, and to the length of the time interval:

$$x(t + \delta t) = x(t) - kx(t)\delta t$$

where k is a positive constant. Rearranging:

$$\frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} = -kx$$

and taking the limit of small δt (see chapter 1):

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad \text{with } x(t_0) = x_0. \quad (3.1)$$

We can solve this separable first-order ODE:

$$\int \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{1}{x} dx = - \int k dt + C$$

$$\log |x| = -kt + C$$

$$|x| = e^C e^{-kt}$$

Use the fact that $x > 0$ and set $A = e^C$:

$$x = A e^{-kt}$$

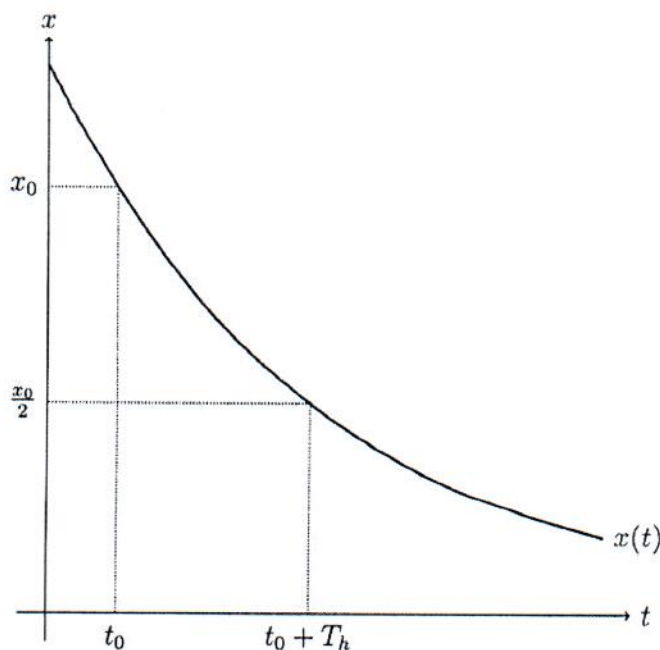
We can now use the initial condition $x(t_0) = x_0$ to find A :

$$x_0 = A e^{-kt_0}, \quad A = x_0 e^{kt_0}$$

which results in the solution for $x(t)$:

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}. \quad (3.2)$$

Graphically:



The **half-life** T_h is the time after which half of the ^{14}C has decayed. So, from (3.2), at time $t_0 + T_h$:

$$x(t_0 + T_h) = \frac{x_0}{2} = x_0 e^{-k(t_0 + T_h - t_0)} = x_0 e^{-kT_h},$$

or

$$T_h = \frac{1}{k} \log 2.$$

For ^{14}C , $T_h = 5730$ years, so $k = \frac{1}{T_h} \log 2 = 0.000121/\text{year}$.

Example: A fossilised bone is found to contain 0.1% of its original ^{14}C . Find the age of the fossil.

Solution: Let t be today's date, and suppose the fossil is T years old, so it was fossilised at time $t_0 = t - T$. At this time it had x_0 ^{14}C , and now it has $0.001x_0$.

$$x(t) = 0.001x_0 = x_0e^{-k(t-t_0)} = x_0e^{-kT},$$

which we can solve for T :

$$T = -\frac{1}{k} \log 0.001 = \frac{1}{k} \log 1000 = 57100 \text{ years.}$$

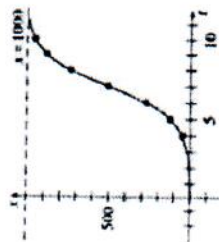
Example: A nuclear breeder reactor produces waste that contains (amongst other things) the isotope ^{239}Pu (Plutonium-239). After 15 years, the initial concentration of ^{239}Pu in the waste has decreased by 0.043%. Find the half-life of the isotope.

Solution:

Example: A sample of thread contains 10^{10} atoms of ^{14}C . How many disintegrations per second will there be?

Solution: $\frac{dx}{dt} = -kx$, so there are 0.000121×10^{10} disintegrations per year, or 0.04 disintegrations per second.

FIGURE 3.2.2 Logistic curves for different initial conditions



(a)

t (days)	x (number infected)
4	50 (observed)
5	124
6	276
7	507
8	735
9	882
10	953

(b)

FIGURE 3.2.3 Number of infected students in Example 1

number of individuals infected with the disease at time t .

EXAMPLE 1 Logistic Growth

Suppose a student carrying a flu virus returns to an isolated college campus of 1000 students. If it is assumed that the rate at which the virus spreads is proportional not only to the number x of infected students but also to the number of students not infected, determine the number of infected students after 6 days if it is further observed that after 4 days $x(4) = 50$.

SOLUTION Assuming that no one leaves the campus throughout the duration of the disease, we must solve the initial-value problem

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x), \quad x(0) = 1.$$

By making the identification $a = 1000k$ and $b = k$, we have immediately from (5) that

$$x(t) = \frac{1000k}{1 + 999e^{-1000kt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}$$

Now, using the information $x(4) = 50$, we determine k from

$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4000k}}$$

We find $-1000k = \frac{1}{4} \ln_{999} \frac{1}{950} = -0.9906$. Thus

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9906t}}$$

Finally, $x(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-3.5436}} = 276$ students.

Additional calculated values of $x(t)$ are given in the table in Figure 3.2.3(b). Note that the number of infected students $x(t)$ approaches 1000 as t increases. \equiv