

## 22. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>

**Věta 1** (Bolzano-Cauchyova podmínka). Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $[a, b]$ . Pak integrál  $\int_a^b f$  konverguje právě tehdy, když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $b' \in (a, b)$  takové, že pro každé dva body  $x_1, x_2$  splňující  $b' < x_1 < x_2 < b$  platí

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| < \varepsilon.$$

### Příklady

1. Zformulujte Bolzano-Cauchyovu podmínku pomocí negace (integrál diverguje právě tehdy, když...).
2. Ukažte divergenci pomocí B-C podmínky.

$$(a) \int_1^{\infty} x^{\alpha} \ln(1+x) |\cos x| dx, \alpha \geq 0. \quad (b) \int_0^1 x^{\alpha} \arctan x \cos \frac{1}{x} dx, \alpha \leq -3.$$

3. Vyšetřete **absolutní i neabsolutní** konvergenci integrálů, jestliže  $a \in \mathbb{R}$  a  $\alpha \in (0, \infty)$ .

$$(a) \heartsuit \int_0^{+\infty} \sin x^{\alpha} dx$$

$$(e) \heartsuit \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{e^{x^2} - 1} \sin \frac{1}{x^2} dx \text{ AK}$$

$$(b) \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{\ln^{\alpha} 2x} dx$$

$$(f) \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} x^{\alpha} dx$$

$$(c) \heartsuit \int_{-\infty}^{+\infty} \sin e^x dx$$

$$(g) \heartsuit \int_0^1 \arcsin^a(x(1-x)) \sin \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$

$$(d) \heartsuit \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^{\alpha}} dx$$

$$(h) \heartsuit \int_0^{+\infty} \arcsin \frac{x}{x^2+1} \ln x \cos x dx$$

### Zkouškové příklady

4. Vyšetřete konvergenci integrálů (nemusí být absolutní)

$$(a) \int_0^1 \ln(\arctan x) \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(e^{1-x} - 1)^{\alpha}} dx, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(c) \int_1^{\infty} \min\{1, \sqrt{x-1}\} \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} dx$$

$$(b) \int_0^{\infty} \arcsin \frac{1}{x} \cos(x^2) \ln x dx$$

$$(d) \int_0^1 \frac{\ln(1-x) \sqrt{x-x^2}}{\sin(\pi x^2)} dx$$

(3a) substitute  $t = x^c$   
 (3c) substitute  $t = e^x$   
 (3d)  $2 \sin x \sin 2x = \cos x - \cos 3x$   
 (3e) substitute  $t = x^{-2}$   
 (3g)  $(\arcsin x)/x$  je monotónní  $\leftrightarrow$  řešení  
 (3h)  $(\arcsin x)/x$  je monotónní  $\leftrightarrow$  řešení