21. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \sin x \, dx$

   Řešení:

   Na malém pravém okolí nuly je integrand f nezáporný, spojitý a platí

   $$\arctan x \approx x, \sin x \approx x \implies f(x) \approx x^{2-1} = x,$$

   odkud plyne, že $\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx$ konverguje protože $\int_0^{\pi/2} x \, dx$ konverguje (LSK).

   Na intervalu $[\pi/2, +\infty)$ je integrand spojitý. Vyšetřeme nejprve integrál

   $$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

   O něm víme, že konverguje neabsolutně. Protože funkce $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$, z LSK máme divergenci (pro absolutní hodnotu) i pro původní integrál.

   Protože funkce $\arctan x$ je spojitá, omezená a monotónní na $[\pi/2, +\infty)$, z Abela konverguje (nabsolutně) také integrál $\int_{\pi/2}^{+\infty} f(x)\, dx$.

   Závěr: integrál konverguje neabsolutně.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} \sin x \, dx$

   Řešení:

   Na malém pravém okolí nuly je integrand f nezáporný, spojitý a platí

   $$\arctan x \approx x, \sin x \approx x \implies f(x) \approx x^{2-\alpha},$$

   odkud plyne, že $\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx$ konverguje (a to absolutně) tehdy a jen tehdy, pokud $2 - \alpha > -1$, tedy pokud $\alpha < 3$.

   Na intervalu $[\pi/2, +\infty)$ je integrand spojitý. Vyšetřeme nejprve integrál

   $$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$$

   O něm víme, že konverguje, pokud $\alpha > 0$, navíc pro $\alpha > 1$ absolutně.

   Protože funkce $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$, z LSK máme absolutní konvergenci i pro původní integrál.

   Protože funkce $\arctan x$ je spojitá, omezená a monotónní na $[\pi/2, +\infty)$, za stejných podmínek konverguje (neabsolutně) z Abela také integrál $\int_{\pi/2}^{+\infty} f(x)\, dx$.

   Závěr: integrál konverguje pro $0 < \alpha < 3$, navíc pro $1 < \alpha < 3$ absolutně.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arccotg}^{\alpha} x \cos x \, dx$

Řešení: Integrand je zřejmě spojitý na $[0, +\infty)$. Tedy absolutně konverguje na $[0, 1]$ a bude tedy stačit uvažovat integrál přes $[1, \infty)$.

Začněme s absolutní konvergencí. Protože na okolí nekonečna je

$$\operatorname{arccotg} x \approx \frac{1}{x},$$

budeme nejprve vyšetřovat integrál

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^{\alpha}} \, dx$$

který konverguje absolutně pro $\alpha > 1$, jinak diverguje.

Nechť tedy $\alpha > 1$. Platí, že $\operatorname{arccot} x \leq \frac{1}{x}$. To je možné ukázat např. takto: Pro funkci $g(x) = x \operatorname{arccot} x$ máme v 1 hodnotu $1 \operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4} < 1$.

Funkce je navíc spojitá na $[1, \infty)$ a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{arccot} x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Zbývá monotónnost funkce $x \operatorname{arccot} x$. Máme

$$(x \operatorname{arccot} x)' = \operatorname{arccot} x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

Položme $x = \cot y$. Pak pro $y \in (0, \frac{\pi}{4}]$, máme $x \in [1, \infty)$

$$\operatorname{arccot} (\cot y) - \frac{\cot y}{\cot y^2 + 1} = y - \cos y \sin y = y - \frac{1}{2} \sin(2y)$$

a protože $|\sin t| \leq 2t$ pro $t \geq 0$, máme

$$y - \frac{1}{2} \sin(2y) \geq y - \frac{1}{2} 2y = 0.$$

Tedy derivace je kladná a $x \operatorname{arccot} x$ je rostoucí.

Dohromady musí platit $x \operatorname{arccot} x \leq 1$.

Pak

$$|\operatorname{arccotg}^{\alpha} x \cos x| \leq \frac{|\cos x|}{x^{\alpha}},$$

tedy ze SK integrál $\int_1^{+\infty} \operatorname{arccotg}^{\alpha} x \cos x \, dx$ konverguje absolutně.

Nechť $\alpha \leq 1$. Protože

$$\lim_{x \to \infty} x \operatorname{arccot} x = 1,$$

tak od jistého x_0 je $x \operatorname{arccot} x \geq \frac{1}{2}$.

Pak

$$|\operatorname{arccotg}^{\alpha} x \cos x| = x^{\alpha} \operatorname{arccotg}^{\alpha} x \cdot \frac{|\cos x|}{x^{\alpha}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} \frac{|\cos x|}{x^{\alpha}},$$

Ze SK pak máme, že pro $\alpha \leq 1$ integrál v absolutní hodnotě diverguje.

Pro neabsolutní konvergenci aplikujme Dirichletovo kritérium.

Funkce $\cos x$ má omezenou primitivní funkci. Funkce $\operatorname{arccot}^{\alpha} x$ je klesající, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccot}^{\alpha} x = 0$ pro $\alpha > 0$. Z Dirichletova kritéria pak konverguje i integrál

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{arccot}^{\alpha} x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

Závěr: Integrál konverguje neabsolutně pro $\alpha > 0$, absolutně pro $\alpha > 1$.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^x + 1)}{x^{3/2}} \sin x \, dx$

Řešení:

U nuly použijte odhady

$$\ln(e^{2x} + e^x + 1) \approx \ln 3, \qquad \sin x \approx x \implies f(x) \approx x^{1-3/2}$$

navíc na dosti malém pravém okolí nuly integrand nemění znaménko, takže podle limitního srovnávacího kritéria integrál konverguje, jestliže konverguje integrál z $\frac{1}{\sqrt{x}}$, což je pravda.

U nekonečna použijme odhady

$$\ln(e^{2x} + e^x + 1) \approx 2x \implies f(x) \approx \frac{2 \sin x}{x^{3/2-1}}$$

Integrál z $\frac{2\sin x}{x^{3/2-1}}$ absolutně nekonverguje, z LSK tedy absolutně nekonverguje ani původní integrál.

Pro neabsolutní konvergenci: integrál z $\frac{2\sin x}{x^{1/2}}$ konverguje neabsolutně z Dirichletova kritéria.

Člen $\ln(e^{2x} + e^x + 1)/2x$ se přilepí pomocí Abelova kritéria, neboť z tvaru

$$\frac{\ln(e^{2x} + e^x + 1)}{2x} = 1 + \frac{\ln(1 + e^{-x} + e^{-2x})}{2x}$$

je patrné, že jde o monotónní funkci na nějakém okolí nekonečna.

Závěr: Integrál konverguje neabsolutně.

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^a \left(\frac{1}{2}\pi - x\right)^b \operatorname{tg}^c x \, dx$

Řešení:

Integrand na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ nemění znaménko, stačí tedy vyšetřit absolutní konvergenci. Dále u nuly platí

$$\operatorname{tg} x \approx x \implies f(x) \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^b \cdot x^{a+c},$$

z LSK tudíž dostáváme podmínku na konvergenci $a + c > -1$.

Na (levém) okolí $\pi/2$ máme

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \approx \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin(\pi/2 - x)} \approx \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$$

a tedy z LSK $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{b-c}$$

Substitucí $y = \frac{\pi}{2} - x$ dostaneme, že konvergence vyšetřovaného integrálu na levém okolí $\pi/2$ je ekvivalentní konvergenci $\int_0^{\frac{\pi}{4}} y^{b-c} \, dy$, odkud máme podmínku $b - c > -1$.

Závěr: protože integrand je spojitý na $(0, \frac{\pi}{4}]$ a $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ (a nemění znaménko), víme z předchozího (pomocí limitního srovnávacího kritéria), že konverguje za podmínky $-1 - a < c < b + 1$, a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x \sin x}{x \arctan(1 - x)} \, dx$

Řešení:

U nuly použijme odhady

$$\sin x \approx x, \qquad \arctan\,(1 - x) \approx \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

z nichž plyne, že integrand na nějakém dostatečně malém pravém okolí nuly nemění znaménko a lze jej srovnat (LSK) s

$$f(x) \approx \ln x$$

přičemž $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln x \, dx$ konverguje absolutně (lze ověřit přímým výpočtem).

U jedničky srovnejme s

$$g(x) = \frac{-(x - 1)}{1 - x} = 1.$$

Pak
$$\lim_{x\to 1-} \frac{|f|}{g} = \lim_{x\to 1-} \frac{|\ln x|}{-(x-1)} \frac{\sin x}{x} \frac{1-x}{\arctan(1-x)} = 1$$

Jelikož $\int_{\frac{1}{2}}^{1}$ konverguje absolutně, konverguje i $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f$.

Závěr: $\int_0^1 f(x)$ konverguje absolutně.

7. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x \sin x}{x \arctan(1-x)}\, dx$

Řešení: Na intervalu $[2, +\infty)$ je integrand spojitý.

Absolutní konvergenci vyloučíme odhadem
$$\left| \frac{\ln x}{x \arctan(1-x)} \sin x \right| \geq \frac{|\sin x|}{x\frac{\pi}{2}},$$

který je platný pro $x > e$ a znalost toho, že "integrál" napravo je divergentní.

Neabsolutní konvergence: díky monotonii a omezenosti funkce arctan stačí vyšetřovat (podle Abelova kritéria) pouze integrál
$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \sin x\, dx.$$

Ten konverguje z Dirichletova kritéria, vzhledem k tomu, že $\ln x/x \to 0$ monotónně na nějakém okolí nekonečna
$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

(derivace této funkce je záporná pro $x > e$) a funkce $\sin x$ má omezenou primitivní funkci.

Závěr: integrál konverguje (pouze) neabsolutně.

8. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} \operatorname{arccotg} x \, \sin x\, dx$

Řešení:

Na (dostatečně malém pravém prstencovém) δ-okolí -1 integrand nemění znaménko a chová přibližně jako funkce $(x+1)^{-1/3}$, (absolutní) konvergence je tedy ekvivalentní konvergenci integrálu
$$\int_0^{\delta} y^{-1/3}\, dy$$

o kterém víme, že konverguje (absolutně).

Na okolí nekonečna se integrand bez sinu chová přibližně jako

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}\text{arccotg } x \approx x^{1/3} \cdot \frac{1}{x} = x^{-2/3}$$

Odtud plyne podle limitního srovnávacího kritéria srovnáním s integrálem přes funkci $|\sin x|/x^{2/3}$, že integrál nekonverguje absolutně.

Pro neabsolutní konvergenci uvažujme nejprve integrál

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3}} \sin x \, dx$$

Použitím Dirichletova kritéria dostaneme neabsolutní konvergenci, neboť $\sin x$ má omezenou primitivní funkci a $x^{-2/3} \to 0$ monotónně pro $x \to +\infty$.

Dále, integrál

$$\int_1^{+\infty} x \,\text{arccot } x \frac{1}{x^{2/3}} \sin x \, dx$$

konverguje z Abelova kritéria, protože $g(x) = x \,\text{arccot } x$ je spojitá na $[1, \infty)$ a protože

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\text{arccot } x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1,$$

tak je funkce na $[1, \infty)$ omezená.

Zbývá monotónnost funkce $x \,\text{arccot } x$. Máme

$$(x \,\text{arccot } x)' = \text{arccot } x - \frac{x}{x^2+1}$$

Položme $x = \cot y$. Pak pro $y \in (0, \frac{\pi}{4}]$, máme $x \in [1, \infty)$

$$\text{arccot } (\cot y) - \frac{\cot y}{\cot y^2 + 1} = y - \cos y \sin y = y - \frac{1}{2} \sin(2y)$$

a protože $|\sin t| \leq 2t$ pro $t \geq 0$, máme

$$y - \frac{1}{2} \sin(2y) \geq y - \frac{1}{2} 2y = 0.$$

Tedy derivace je kladná a $x \,\text{arccot } x$ je rostoucí.

Poslední krok, uvažujme integrál

$$\int_1^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{1+x}} \cdot \frac{1}{x^{1/3}} \cdot x \,\text{arccot } x \frac{1}{x^{2/3}} \sin x \, dx.$$

Integrál konverguje z Abelova kritéria. Funkce $\sqrt[3]{\frac{x^2}{1+x}} \cdot \frac{1}{x^{1/3}}$ je spojitá na $[1, \infty)$.

Jelikož

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{1+x}} \cdot \frac{1}{x^{1/3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+x}} = 1,$$

je i omezená.

Pro monotónnost stačí vyšetřit funkci $\frac{x^2}{x^2+x}$. Platí

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0,$$

tedy funkce je rostoucí.

Závěr:

Integrál konverguje (absolutně) na $(-1, \delta]$. Na intervalu $[\delta, 1]$ konverguje, protože jde o spojitou funkci na omezeném a uzavřeném intervalu. Na $[1, \infty)$ integrál konverguje neabsolutně.

Dohromady: Integrál konverguje neabsolutně.

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{x^\alpha} \sin 2x \, dx$

Řešení:

Protože

$$1/e \leq e^{\sin x} \leq e, \qquad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}$$

a na okolí nuly je

$$\sin 2x \approx 2x$$

stačí (z LSK) na okolí nuly vyšetřovat integrál

$$\int_0^\delta x^{1-\alpha} \, dx$$

který konverguje pro každé $\alpha < 2$.

Podle limitního srovnávacího kritéria konverguje integrál na okolí nekonečna (vzhledem k odhadům na $e^{\sin x}$) absolutně pro $\alpha > 1$ (srovnáním s $|\sin 2x|/x^\alpha$).

Integrál na okolí nekonečna konverguje neabsolutně pro $\alpha > 0$. Nahlédneme to podle Dirichletova kritéria, pokud dokážeme, že $e^{\sin x} \sin 2x$ má omezenou primitivní funkci na $(0, +\infty)$. Lze ale přímo počítat (substitucí $t = \sin x$ a per partes)

$$\int e^{\sin x} \cdot 2 \sin x \cos x \, dx = \int u e^u \, du = u e^u - e^u = C + \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x}$$

což je evidentně omezená funkce.

Varování: Protože $e^{\sin x}$ není na žádném okolí nekonečna monotónní, nelze použít techniku přilepení podle Abelova kritéria.

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^\alpha x}{\ln^\beta(1+x)} \sin x \, dx$

Řešení:

U nuly použijeme odhady

$$\arctan x \approx x, \quad \ln(1+x) \approx x, \quad \sin x \approx x$$

stačí tedy (z LSK) vyšetřovat integrál

$$\int_0^\delta x^{\alpha+1-\beta} \, dx$$

který konverguje (absolutně) pro $\alpha > \beta - 2$.

U nekonečna nenastává absolutní konvergence nikdy, neboť $\ln^\beta(1+x) \leq \sqrt{x}$ pro nějaké $x > x_\beta$ reálné a srovnávací kritérium aplikované na $|\sin x|/\sqrt{x}$ dává divergenci.

Neabsolutní konvergence u nekonečna nastává pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta > 0$ podle Dirichletova kritéria pro $\sin x/\ln^\beta(1+x)$ a tudíž podle Abelova kritéria pro vyšetřovaný integrál.

Závěr: integrál konverguje neabsolutně pro $(\beta > 0) \,\&\, (\alpha > \beta - 2)$. Absolutně nekonverguje pro žádné $\alpha, \beta > 0$.

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^\alpha x \operatorname{arccotg}^\beta x}{x^\gamma} \cos x \, dx$

Řešení:

Na okolí nuly je

$$\arctan^\alpha x \approx x^\alpha, \quad \operatorname{arccotg}^\beta x \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^\beta, \quad \cos x \approx 1.$$

Tudíž na dostatečně malém okolí nuly integrand nemění znaménko a chová se přibližně jako funkce $x^{\alpha-\gamma}$. Odtud plyne, že integrál na vhodném okolí nuly konverguje (a to absolutně), pokud $\alpha - \gamma > -1$.

Na okolí nekonečna zase platí

$$\arctan^\alpha x \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha, \quad \operatorname{arccotg}^\beta x \approx \frac{1}{x^\beta}.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria aplikovaného na funkci $|\cos x|/x^{\gamma+\beta}$ dostaneme, že integrál na vhodném okolí nekonečna konverguje absolutně, pokud $\gamma + \beta > 1$.

Podle Dirichletova kritéria pak máme, že integrál $\cos x/x^{\gamma+\beta}$ na vhodném okolí nekonečna konverguje neabsolutně, pokud $\gamma + \beta > 0$. Pomocí Abelova kritéria pak dostaneme, že za stejné podmínky konverguje neabsolutně také vyšetřovaný integrál (neboť funkce $\arctan x$ a $x \operatorname{arccotg} x$, a tedy také jejich mocniny, jsou na vhodném okolí nekonečna monotónní a omezené).