21. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/

Věta 1 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konveregnce Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a,b). Dále nechť $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ je na $[a,b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:

(A) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

(D) Je-li F omezená na (a,b) a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

Algoritmus

1. Kde jsou problematické body?
   (a) $\pm\infty$
   (b) Jde funkce v krajním bodě do $\pm\infty$?
   (c) Jde funkce v krajním bodě do 0, ale je tam parametr?
   (d) Je-li funkce spojitá až do kraje omezeného uzavřeného intervalu $\to$ konverguje absolutně.
2. Mění funkce na okolí problematického bodu znaménko? Je oscilující u nekonečna?
   (a) Nemění znaménko $\to$ absolutní a neabsolutní konvergence splývá.
   (b) Mění znaménko:
      i. Je AK $\to$ Pak máme i neabsolutní konvergenci.
      ii. Není AK nebo na ni nejsme tázáni $\to$ Abel - Dirichlet.
      iii. Pozor, funkce se může chovat různě v různých bodech.
3. Dáváme pozor na parametry. Zejména pečlivě ověřujeme, zda jsme zjistili konvergenci i divergenci. Některá kritéria, např. SK nebo Abel–Dirichlet dávají jen jedno z toho.
4. Závěr.

Příklady

Vyšetřete **absolutní i neabsolutní** konvergenci integrálů, jestliže $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \sin x \, dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} \sin x \, dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arccotg}^\alpha x \cos x \, dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^x + 1)}{x^{3/2}} \sin x \, dx$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^a \left(\frac{1}{2}\pi - x\right)^b \operatorname{tg}^c x \, dx$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x \sin x}{x \arctan(1-x)} \, dx$
7. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x \sin x}{x \arctan(1-x)} \, dx$
8. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} \operatorname{arccotg} x \, \sin x \, dx$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(\sin x)}{x^\alpha} \sin 2x \, dx$
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^\alpha x}{\ln^\beta(1+x)} \sin x \, dx$
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^\alpha x \operatorname{arccotg}^\beta x}{x^\gamma} \cos x \, dx$

(1) Uvažujte $\arctan x \cdot \frac{\sin x}{x}$
(3) Uvažujte $x^\alpha \operatorname{arccot}^\alpha x \frac{\cos x}{x^\alpha}$. Monotonie $x \operatorname{arccot} x$: zdrivujte a substituujte $x = \cot y$.
(4) u ∞: $\ln(e^{2x} + e^x + 1) \approx 2x$. Pro monotonii: $\frac{\ln(e^{2x}+e^x+1)}{2x} = 1 + \frac{\ln(1+e^{-x}+e^{-2x})}{2x}$
(5) vyšetřujte jen AK
(7) Abel 2x
(8) NElze použít Abela, najděte PF k $e^{\sin x} \sin 2x$
(9) pro AK u ∞: $|\ln^\beta(1+x)| \leq \sqrt{x}$ od jistého x_β.