18. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/,

Teorie

Věta 1 (Integrální kritérium)**.** Nechť f je **nezáporná nerostoucí spojitá** funkce na $[n_0, \infty)$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 2 (Objem a povrch rotačního tělesa)**.** Nechť f je spojitá a **nezáporná** na intervalu $[a, b]$. Pak rotační těleso, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, kolem osy x, má objem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nechť má f navíc spojitou derivaci $f'(x)$. Pak pro obsah rotační plochy vzniklé rotací oblouku křivky $y = f(x)$ kolem osy x platí

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 3. Jestliže rotujeme kolem osy y (požadujeme $a \geq 0$), dostaneme

$$V = \pi \int_c^d f^2(y)\,\mathrm{d}y,$$

kde (c, d) je korespondující interval na ose y,
nebo

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

nebo

$$S = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,\mathrm{d}y.$$

Věta 4 (Délka oblouku křivky)**.** Nechť má funkce f spojitou derivaci f' na intervalu $[a, b]$. Pak délka této křivky

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Nechť je křivka dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$. Nechť funkce φ a ψ mají spojité derivace na intervalu $[a, b]$ (v krajních bodech bereme jednostranné derivace). Pak pro délku křivky platí

$$l = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Příklady

1. (a) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = -3$.
   (b) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^2 - x - 12$, $y = 0$.
   (c) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$.
   (d) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = 2^x$, $y = x$, $x = -2$, $x = 1$.
   (e) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.
   (f) Určete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru $y = 2$, $x = 0$, $x = 4$ kolem osy x.
   (g) Určete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru $y = 3 - \frac{1}{2}x$, $x = 0$, $x = 4$ kolem osy x.

2. Spočtěte
   (a) Určete délku grafu funkce $y = \ln x$ pro $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{15}]$.
   (b) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $y = 4 + x$, $x \in [-4, 2]$, kolem osy x.
   (c) Určete objem koule o poloměru $r > 0$.
   (d) Určete objem kužele s poloměrem podstavy r a výškou v.
   (e) Spočtěte objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = e^x$ pro $x \in [0, 1]$ kolem osy y.

3. Spočtěte
   (a) Určete délku grafu semikubické paraboly $y^2 = x^3$ pro $x \in [0, 1]$.
   (b) Určete obsah plochy ohraničené křivkami $x^2 + y^2 = 2$ a $y = x^2$.
   (c) Určete obsah plochy elipsy s poloosami a a b.
   (d) Určete délku grafu řetězovky $y = a \cosh \frac{x}{a}$ pro $x \in [-1, 1]$, kde $a > 0$ je parametr.

4. Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o absolutní konvergenci řad

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
   (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\beta n}$, $\beta \geq 0$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan^3 n}{1+n^2}$
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

(3b) 2. věta o substituci, $x = \sqrt{2} \sin t$
(3c) 2. věta o substituci, $x = a \sin t$