17. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/,

Příklady

Spočtěte Newtonovy integrály:

1. $\displaystyle\int_4^\infty \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$

   Řešení:

   Rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$\int_4^\infty \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_4^\infty \frac{1}{x-1} + \frac{-4}{x-2} + \frac{3}{x-3}\,\mathrm{d}x$$

   Po integraci

$$= \frac{1}{2}\Big[\ln|x-1| - 4\ln|x-2| + 3\ln|x-3|\Big]_4^\infty = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{(x-1)(x-3)^3}{(x-2)^4}\right]_4^\infty = 0 - \frac{1}{2}\ln\frac{3\cdot 1^3}{2^4} = \frac{1}{2}\ln\frac{16}{3}$$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

   Řešení:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$$

   Po rozkladu na parciální zlomky

$$= \frac{1}{3}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{2x+1-1-2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x$$

   Po integraci

$$\frac{1}{3}\left[\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_{-\infty}^0$$
$$= \frac{1}{3}\left[\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{|x^2+x+1|}} + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_{-\infty}^0 = 0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6} - \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{-\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{2\pi}{9}\sqrt{3}.$$

3. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Zvolíme substituci $t = \cos x$.

$$\int_1^{-1} \frac{-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = [\arctan t]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 3}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Substituce $t = e^x$. Pak

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^2 - 3t + 3}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-3}{\sqrt{3}}\right]_0^\infty$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{5\pi}{3\sqrt{3}}$$

5. $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Nejprve upravme na

$$\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1}{4}\sin^2(2x)\,\mathrm{d}x$$

Po substituci $t = 2x$ máme

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{16}(1 - \cos(2t))\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{16}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8}$$

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Protože jsme na $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, můžeme psát

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x}\sqrt{1 - \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$$

Substituce $t = \cos x$:

$$\int_1^{\sqrt{2}/2} -\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{8}}\right)$$

7. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Aplikujeme per partes

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-x^2e^{-x}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -2xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2e^{-x}\right]_{-1}^{1} + \left[-2xe^{-x}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -2e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-x^2e^{-x}\right]_{-1}^{1} + \left[-2xe^{-x}\right]_{-1}^{1} + \left[-2e^{-x}\right]_{-1}^{1} \\ &= -e^{-1} + e - 2e^{-1} - 2e - 2e^{-1} + 2e = e - \frac{5}{e}\end{aligned}$$

8. $\displaystyle\int_{0}^{1} \arccos^2 x\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Substituce $x = \cos t$, pak $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$ a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t\,\mathrm{d}t$$

Dvakrát per partes:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t\,\mathrm{d}t &= \left[t^2\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2t\cos t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + [2t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^2\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + [2t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + [2\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - 0 + \pi - 0 + 0 - 2 = \pi - 2\end{aligned}$$

9. $\displaystyle\int_0^1 x\arcsin x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Substituce $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\frac{1}{2}\sin(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin(2t)\,\mathrm{d}t$$

Substituce $u = 2t$, $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t$

$$\frac{1}{8}\int_0^{\pi} u\sin u\,\mathrm{d}u$$

Per partes

$$= \frac{1}{8}[-u\cos u]_0^{\pi} + \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8}[-u\cos u]_0^{\pi} + \frac{1}{8}[\sin u]_0^{\pi} = \frac{1}{8}\pi$$

10. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Substituce $x=\sin t,\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2(2t)\,\mathrm{d}t$$

Substituce $u=2t,\ \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}t$:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{8}\sin^2(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \frac{1}{8}\sin^2(u)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{1}{16}(1-\cos(2u))\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{16}\left(t-\frac{1}{2}\sin(2u)\right)\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{16}\pi$$

11. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Substituce $t=\sqrt{\frac{x+1}{x+0}}$, pak $x=\frac{-1}{1-t^2}$ a $\mathrm{d}x=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$:

$$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} t\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

Rozklad na parciální zlomky

$$= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{-1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln|t-1|-\ln|t+1|-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{|t-1|}{|t+1|}-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\infty} = -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+2\sqrt{2}\right)$$

Podmínky věty o substituci: $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$, $\omega(t)=\frac{-1}{1-t^2}$. Interval $(\alpha,\beta)=(\sqrt{2},\infty)$, $(a,b)=(0,1)$. Platí $\omega((\alpha,\beta))=(a,b)$ a navíc $\omega'=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\neq 0$ na celém (α,β).

(Plyne z: obrázku https://www.geogebra.org/calculator/cb3k7uxu)

12. $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-4}}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Substituce: $t=\sqrt{\frac{x-2}{x-4}}$, $x=\frac{-4t^2+2}{1-t^2}$, $\mathrm{d}x=\frac{-4t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_1^\infty \frac{(1-t^2)^2}{(-4t^2+2)^2} t \frac{4t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{4t^2}{(4t^2-2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{4t^2}{((2t-\sqrt{2})(2t+\sqrt{2}))^2}\,\mathrm{d}t$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\int_1^\infty -\frac{1}{8\left(\sqrt{2}t+1\right)} + \frac{1}{8\left(\sqrt{2}t+1\right)^2} + \frac{1}{8\left(\sqrt{2}t-1\right)} + \frac{1}{8\left(\sqrt{2}t-1\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

Po integraci

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}t+1| + \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}t-1| - \frac{1}{8\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}t+1} - \frac{1}{8\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}t-1}\right]_1^\infty \\
&= \left[\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\frac{|\sqrt{2}t-1|}{|\sqrt{2}t+1|} - \frac{1}{8\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}t+1} - \frac{1}{8\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}t-1}\right]_1^\infty \\
&= -\frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\ln\frac{|\sqrt{2}-1|}{|\sqrt{2}+1|} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + 2\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

Podmínky věty o substituci: $f(x) = \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-4}}$, $\omega(t) = \frac{-4t^2+2}{1-t^2}$. Interval $(\alpha,\beta) = (1,\infty)$, $(a,b) = (4,\infty)$. Platí $\omega((\alpha,\beta)) = (a,b)$ a navíc $\omega' = \frac{-4t}{(1-t^2)^2} \neq 0$ na celém (α,β).

(Plyne z:

$$\omega(t) = \frac{-4t^2+2}{1-t^2} = \frac{-4t^2+4}{1-t^2} + \frac{-2}{1-t^2} = 4 + \frac{-2}{1-t^2},$$

což už lze načrtnout: https://www.geogebra.org/calculator/cb3k7uxu)

13. $\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + 2\sin x + 3}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Protože funkce je 2π periodická, můžeme psát

$$\int_0^{4\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + 2\sin x + 3}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{3\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + 2\sin x + 3}\,\mathrm{d}x$$

Což rozepíšeme na

$$\int_{-\pi}^{3\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + 2\sin x + 3}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + 2\sin x + 3}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{3\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + 2\sin x + 3}\,\mathrm{d}x$$

Na intervalech $(-\pi, \pi)$ a $(\pi, 3\pi)$ pak můžeme substituovat $t = \tan\frac{x}{2}$. Po aplikaci vzorců dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + 2\sin x + 3}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{2t^2+4t+4}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{2t^2+4t+4}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^2+1}\,\mathrm{d}t = [\arctan\,(t+1)]_{-\infty}^{\infty} = \pi\end{aligned}$$

Na intervalu $(\pi, 3\pi)$ dostaneme stejný výsledek, celkem tedy máme

$$\int_{-\pi}^{3\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + 2\sin x + 3}\,\mathrm{d}x = 2\pi.$$

Podmínky věty o substituci: $f(t) = \frac{2}{2t^2+4t+4}$, $\omega(x) = \tan\frac{x}{2}$. Interval $(\alpha, \beta) = (-\pi, \pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Platí $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a navíc $\omega' = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} \neq 0$ na celém (α, β).

Pro interval $(-\pi, 3\pi)$ analogicky.

14. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \mathrm{tg}\ x}$

Řešení:

Substituujeme za $t = \tan x$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{1+t} - \frac{1}{2}\frac{t-1}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{1+t} - \frac{1}{4}\frac{2t}{(1+t^2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{1}{2}\arctan\,t\right]_0^{\infty} \\ &= \left[\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2}{t^2+1} + \frac{1}{2}\arctan\,t\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Podmínky věty o substituci: $f(t) = \frac{1}{(1+t)(1+t^2)}$, $\omega(x) = \tan x$. Interval $(\alpha, \beta) = (0, \frac{\pi}{2})$, $(a, b) = (0, \infty)$. Platí $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a navíc $\omega' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ na celém (α, β).

- Součet konvergentních řad (1) a (2) je konvergentní řada, tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \sqrt{n}\cos n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} + \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{konverguje.} \tag{3}$$

- Protože posloupnost $\cos \frac{1}{n}$ je omezená a rostoucí (odůvodněte podrobně!), konverguje podle Abelova kritéria (s využitím znalosti (3)) i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \sqrt{n}\cos n}{n} \cdot \cos \frac{1}{n}.$$

Závěr: řada konverguje.

15

Příklad 3 : Použijeme substituci $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Potom máme

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Tato substituce převede uvažovaný integrál na

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)}\, dt.$$

Integrand rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)} = \frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1}.$$

Standardní integrací racionálních zlomků pak dostaneme

$$\int \left(\frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1} \right) dt \overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(t^2+t+2) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}} \right) - \frac{1}{2}\log(t^2+1) + \operatorname{arctg} t \qquad \text{na } \mathbf{R}.$$

Pak máme

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)}\, dt &= \left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{t^2+t+2}{t^2+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}} \right) + \operatorname{arctg} t \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \pi \left(1 + \frac{1}{\sqrt{7}} \right).\end{aligned}$$

Poznámka: Pozor! Rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1} \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t+1}{t^2+t+2}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-t}{t^2+1}\, dt$$

neplatí, neboť integrály na pravé straně neexistují.

Příklad 4 : Integrand $f(x) = \operatorname{tg}^{\alpha} x \sin^{\beta} x$ je spojitý a kladný na intervalu $(0, \pi/2)$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Integrál tedy $\int_0^{\pi/2} f$ tedy konverguje, právě když konvergují integrály $\int_0^{\pi/4} f$ a $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f$.

- Integrál $\int_0^{\pi/4} f$. Pro srovnání použijeme kladnou a spojitou funkci $g(x) = x^{\alpha+\beta}$ definovanou na $(0, \pi/4]$. Platí $\lim_{x\to 0+} f(x)/g(x) = 1$, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_0^{\pi/4} f$ konverguje, právě když konverguje integrál $\int_0^{\pi/4} x^{\alpha+\beta}\, dx$. Poslední integrál konverguje, právě když $\alpha + \beta > -1$.

tedy i

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)n=0$$

podle Heineho věty.

- Označíme $f(x) := 1 - x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, potom

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}-(\log(x+1)-\log x)\,.$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro libovolné $x\in(0,\infty)$ existuje $\xi_x\in(0,1)$ takové, že

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+\xi_x}<0 \qquad \text{pro všechna } x>0.$$

Funkce f je tedy klesající na intervalu $(0,\infty)$, a proto je i posloupnost $a_n=f(n)$ klesající.

Závěr: řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

Poznámka: Monotonii funkce můžeme zdůvodnit i takto. Platí

$$f''(x)=\frac{1}{x(1+x)^2}, \qquad x\in(0,\infty).$$

Funkce f' je tedy rostoucí na $(0,\infty)$ a $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$. Odtud plyne, že f' je záporná na $(0,\infty)$, a tedy f je na $(0,\infty)$ klesající.

16

Příklad 3 : Použijeme substituci $\sqrt{2x+1}=t$, tj. $x=\frac{1}{2}(t^2-1)$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$. Dostaneme

$$I:=\int_0^1\frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{4t^2}{(t^2+3)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{4t^2}{(t^2+3)^2}=\frac{4}{t^2+3}-\frac{12}{(t^2+3)^2}\,.$$

Zintegrovat $\frac{4}{t^2+3}$ není obtížné, primitivní funkci k funkci $\frac{12}{(t^2+3)^2}$ najdeme například pomocí rekurentní formule pro integrály typu $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$. Celkově dostaneme

$$\int\left(\frac{4}{t^2+3}-\frac{12}{(t^2+3)^2}\right)\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{2t}{t^2+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}, \qquad t\in\mathbf{R}.$$

Tedy je

$$I=\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{2t}{t^2+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Příklad 4 : Označíme

$$f(x)=\frac{\log^\alpha(1+x)\sin^\beta x}{x^2(\pi-x)^3}$$

pro $x\in(0,\pi)$. Funkce f je na intervalu $(0,\pi)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Položme $g(x)=\frac{x^\alpha x^\beta}{x^2}=x^{\alpha+\beta-2}$. Funkce g je na intervalu $(0,1]$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to0+}f(x)/g(x)=\pi^{-3}\in(0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria

$a_n := f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, je tedy rostoucí a snadno se spočte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \cdot \cos n \quad \text{konverguje.} \tag{1}$$

- Posloupnost $\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a omezená (monotonii lze opět dostat například zderivováním příslušné funkce, omezenost plyne z toho, že posloupnost má vlastní limitu – jakou?). Podle Abelova kritéria a (1) tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n + 1}\right) \cdot \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \cdot \cos n \quad \text{konverguje.} \tag{2}$$

Poznámka. Řada dokonce konverguje absolutně, což byl jiný (otázkou je, jestli jednodušší) způsob, jak zjistit její konvergenci. Pro všechna $n \in \mathbf{N}$ totiž platí:

$$\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n + 1}\right) \cdot \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \cdot \cos n\right| \le \frac{\pi}{2}\left|\log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right)\right| = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{e^n + 1}{e^n - 1}\right) \tag{3}$$

a dále

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{e^n+1}{e^n-1}\right)}{\frac{2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{2}{e^n-1}\right)}{\frac{2}{e^n-1}} \cdot \frac{\frac{2}{e^n-1}}{\frac{2}{e^n}} = 1 \tag{4}$$

(spočtěte pečlivě). Použijte dále skutečnost, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n}$ konverguje (například podle podílového kritéria). Výsledek pak dá limitní srovnávací a srovnávací kritérium s použitím (3) a (4).

17

Příklad 3 : Použijeme substituci $e^x = y$, $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$. Dostaneme

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x + 2)^2(e^x + 1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{y^2}{(y + 2)^2(y + 1)^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{y^2}{(y + 2)^2(y + 1)^2} = \frac{4}{(y + 2)^2} + \frac{4}{y + 2} + \frac{1}{(y + 1)^2} - \frac{4}{y + 1}.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{4}{y + 2} + 4\log(y + 2) - \frac{1}{y + 1} - 4\log(y + 1)\right]_0^{\infty} \\ &= \left[-\frac{4}{y + 2} - \frac{1}{y + 1} + 4\log\left(\frac{y + 2}{y + 1}\right)\right]_0^{\infty} = \underline{3 - 4\log 2}. \end{aligned}$$

Příklad 4 : Označíme

$$f(x) = (\arcsin x - x)^{\alpha} \frac{\sin^{\beta}(\pi x)}{(1 - x)^{\alpha}}$$

pro $x \in (0, 1)$. Funkce f je na intervalu $(0, 1)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.