17. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/,

Teorie

Definice 1. Nechť $a, b \in R^*$, $a < b$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že *funkce f má na intervalu (a, b) Newtonův integrál*, případně že *Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje*, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ vlastní;

Hodnotou Newtonotva integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbb{R}$ určený výrazem

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Věta 2 (Per partes pro určitý integrál)**.** Nechť funkce F je primitivní k f na (a, b), G je primitivní ke g na (a, b). Potom

$$\int_a^b gF = [GF]_a^b - \int_a^b Gf,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Věta 3 (Substituce pro určitý integrál 1)**.**

1. Nechť f je spojitá na $[a, b]$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ je funkce, která má na intervalu $[\alpha, \beta]$ spojitou první derivaci. Pak
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Nechť f je spojitá na $[a, b]$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ je na a má na intervalu $[\alpha, \beta]$ vlastní spojitou nenulovou derivaci. Pak
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [\Phi(\varphi^{-1}(t))]_a^b = [\Phi(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$
kde Φ je primitivní funkce k $f \circ \varphi \cdot \varphi'$.

Věta 4 (Substituce pro určitý integrál 2)**.** Nechť $\omega : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ splňuje $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a ω má vlastní nenulovou derivaci na (α, β). Potom

$$\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta (f \circ \omega)(x)|\omega'(x)|\,\mathrm{d}x,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Poznámka 5. Lze psát i takto:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Příklady

Spočtěte Newtonovy integrály:

1. $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x+1}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+3}\,\mathrm{d}x$

5.* $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

6.* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$

8.* $\displaystyle\int_0^{1} \arccos^2 x\,\mathrm{d}x$

9.* $\displaystyle\int_0^{1} x\arcsin x\,\mathrm{d}x$

10.* $\displaystyle\int_0^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

11.* $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\mathrm{d}x$

12.* $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-4}}\,\mathrm{d}x$

13.* $\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x+2\sin x+3}$

14.* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\operatorname{tg} x}$

Zkouškové příklady

(doc. Rokyty)

15. $\displaystyle\int_{\pi}^{\pi} \frac{2+\cos x}{3+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

16. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x+2)^2(e^x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

(5) $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$
(6) $= \sqrt{\cos x}\,|\sin x|$
(8) $x = \cos t$
(9) $x = \sin t$
(10) $x = \sin t$
(11) $t = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$
(12) $t = \sqrt{\frac{x-2}{x-4}}$
(13) posuňte na $(-\pi, 3\pi)$, pak $t = \tan\frac{x}{2}$
(14) $t = \tan x$