16. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/,

Teorie

Definice 1. Nechť $a, b \in R^*$, $a < b$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že *funkce f má na intervalu (a, b) Newtonův integrál*, případně že *Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje*, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ vlastní;

Hodnotou Newtonotva integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbb{R}$ určený výrazem

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Věta 2 (Per partes pro určitý integrál)**.** Nechť funkce F je primitivní k f na (a, b), G je primitivní ke g na (a, b). Potom

$$\int_a^b gF = [GF]_a^b - \int_a^b Gf,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Věta 3 (Substituce pro určitý integrál 1)**.**

1. Nechť f je spojitá na $[a, b]$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ je funkce, která má na intervalu $[\alpha, \beta]$ spojitou první derivaci. Pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Nechť f je spojitá na $[a, b]$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ je na a má na intervalu $[\alpha, \beta]$ vlastní spojitou nenulovou derivaci. Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [\Phi(\varphi^{-1}(t))]_a^b = [\Phi(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde Φ je primitivní funkce k $f \circ \varphi \cdot \varphi'$.

Věta 4 (Substituce pro určitý integrál 2)**.** Nechť $\omega : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ splňuje $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a ω má vlastní nenulovou derivaci na (α, β). Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ \omega)(t)|\omega'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Poznámka 5. Lze psát i takto:

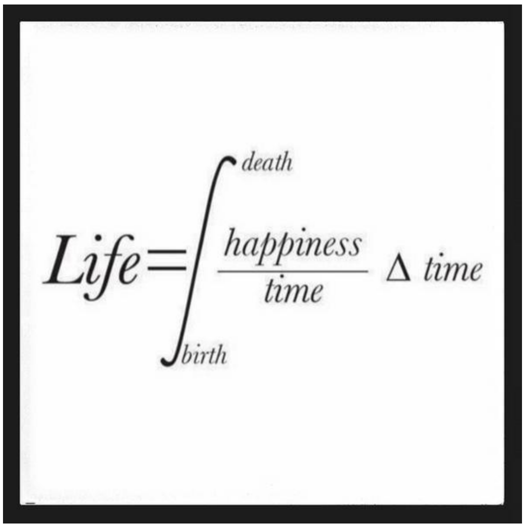
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Příklady

Spočtěte Newtonovy integrály:

1. (a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$
   (b) $\displaystyle\int_1^2 3x^2 + 2x + 1 \,\mathrm{d}x$
   (c) $\displaystyle\int_1^2 2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$
   (d) $\displaystyle\int_{-5}^0 \frac{2}{3-4x} \,\mathrm{d}x$
   (e) $\displaystyle\int_{-7}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2-x}} \,\mathrm{d}x$
   (f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$
   (g) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$
   (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x \,\mathrm{d}x$
   (i) $\displaystyle\int_0^\infty e^x \,\mathrm{d}x$
   (j) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x \,\mathrm{d}x$

2. (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1} \,\mathrm{d}x$
   (b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \,\mathrm{d}x$
   (c) $\displaystyle\int_1^2 x \ln x \,\mathrm{d}x$
   (d) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$
   (e) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \,\mathrm{d}x$
   (f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$
   (g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+3)^5}$
   (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} + \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$
   (i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$
   (j) $\displaystyle\int_a^b \operatorname{sgn} x \,\mathrm{d}x,\ a<0,\ b>0$
   (k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$
   (l) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$
   (m) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} \,\mathrm{d}x$
   (n) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} \,\mathrm{d}x$
   (o) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{x-1} \,\mathrm{d}x$


Life
death
happiness
time
Δ time
birth