15. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/

Příklady

1. typ $R\left(x, \sqrt[m]{x+a}\right)$

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

   Řešení:

   Použijeme substituci $t = \sqrt[6]{x}$. Pak platí vztah $t^6 = x$. Potom pro substituci 1. typu

$$\mathrm{d}t = \left(x^{1/6}\right)' \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^{-5/6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6t^5}\,\mathrm{d}x.$$

Pro 2. větu o substituci by to bylo $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$. Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^6(1+2t^3+t^2)}\,6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{1}{t(1+t^2+2t^3)}\,\mathrm{d}t.$$

Trojčlen ve jmenovateli má zřejmě kořen -1 a lze jej tedy rozložit na tvar $(t+1)(2t^2-t+1)$. Dále postupujeme rozkladem na parciální zlomky.

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{2t^2-t+1}$$

Přenásobením jmenovateli dostaneme

$$1 = A(t+1)(2t^2-t+1) + Bt(2t^2-t+1) + (Ct+D)t(t+1).$$

Dosazením $t=0$ a $t=-1$ dostaneme, že $A=1$ a $B=-\frac{1}{4}$. Porovnáním koeficientu u t^3 máme, že $2A+2B+C=0$, tedy $C=-2A-2B=-\frac{3}{2}$, a porovnáním koeficientů u lineárního členu máme, že $B+D=0$, tedy že $D=-B=\frac{1}{4}$. Odtud vyplývá, že

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{8}\frac{6t-1}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}.$$

Integrály prvních dvou členů jsou zřejmé, poslední člen integrujeme dalším rozkladem na

$$\frac{1}{8}\frac{6t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}\frac{2t-\frac{1}{2}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}\frac{1}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}.$$

První ze sčítanců pak lze integrovat substitucí jmenovatele, druhý podle vzorce (je to zrychlený převod na čtverec)

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+py+q} \overset{C}{=} \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2y+p}{\sqrt{4q-p^2}}, \qquad \text{je-li } 4q > p^2.$$

Kombinací všech výsledků dostaneme, že

$$\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\ \mathrm{d}x = 6\int \frac{1}{t(1+t^2+2t^3)}\ \mathrm{d}t \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} 6\ln t - \frac{6}{4}\ln(1+t) - \frac{18}{8}\ln\left(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right) - \frac{6}{16}\frac{2}{\sqrt{2-\frac{1}{4}}}\mathrm{arctan}\ \frac{2t-\frac{1}{2}}{\sqrt{2-\frac{1}{4}}} \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} 6\ln t - \frac{3}{2}\ln(1+t) - \frac{9}{4}\ln\left(2t^2-t+1\right) - \frac{3}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctan}\ \frac{4t-1}{\sqrt{7}} =$$

$$= \ln x - \frac{3}{2}\ln(1+\sqrt[6]{x}) - \frac{9}{4}\ln\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right) - \frac{3}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctan}\ \frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}.$$

Ve druhém řádku jsme použili fakt, že $\ln(g(t)) \overset{C}{=} \ln(ag(t))$ pro každé $a>0$, tedy že rozšířením výrazu uvnitř logaritmu kladným číslem získáme až na konstantu stejný výraz (se stejným definičním oborem). Logaritmy ve výrazu můžeme ještě sjednotit do jednoho, například takto:

$$\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right)^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctan}\ \frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$$

Původní funkce je spojitá (a definovaná) na $(0,\infty)$ - tam budeme hledat primitivní funkci.
Při 1. větě o substituci máme $\varphi(x)=\sqrt[6]{x}$, $\varphi' = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$ a $f(t)=\frac{6}{t(1+t^2+2t^3)}$.
Interval $(\alpha,\beta)=(0,\infty)$ a $\varphi(\alpha,\beta)=(0,\infty)$.
Funkce f má primitivní funkci na $(-\infty,0)$ nebo $(0,\infty)$. Zvolme $(a,b)=(0,\infty)$. Pak $\varphi(\alpha,\beta)\subseteq(a,b)$.
Pro 2. větě o substituci máme $\varphi(t)=t^6$, $\varphi^{-1}(x)=\sqrt[6]{x}$. $\varphi'=6t^5$. Dále $f(x)=\frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$ a $f(\varphi(t))\varphi'(t)=\frac{6}{t(1+t^2+2t^3)}$. Nakonec

$$G(t) = 6\ln t - \frac{3}{2}\ln(1+t) - \frac{9}{4}\ln\left(2t^2-t+1\right) - \frac{3}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctan}\ \frac{4t-1}{\sqrt{7}}$$

Intervaly: $t\in(\alpha,\beta)=(0,\infty)$ a $\varphi(\alpha,\beta)=(0,\infty)=(a,b)$.
Platí, že $\varphi'(t)\neq 0$ na (α,β). Výsledný integrál pak máme na $(a,b)=(0,\infty)$.

(b) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Řešení:
Použijeme substitutci $t=\sqrt[6]{x+1}$. Potom $\mathrm{d}x = 6t^5\ \mathrm{d}t$ a

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-t^3}{1+t^2}6t^5\ \mathrm{d}t.$$

Protože

$$(-t^8+t^5):(t^2+1) = -t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{1+t^2}$$

je

$$\int \frac{1-t^3}{1+t^2}\,6t^5 \,\mathrm{d}t = 6\int \left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} -\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3\ln(1+t^2)-6\mathrm{arctan}\ t,$$

$$= -\frac{6}{7}(\sqrt[6]{x+1})^7+\frac{6}{5}(\sqrt[6]{x+1})^5+\frac{3}{2}(\sqrt[6]{x+1})^4-2(\sqrt[6]{x+1})^3-3(\sqrt[6]{x+1})^2+6(\sqrt[6]{x+1})$$
$$+3\ln(1+(\sqrt[6]{x+1})^2)-6\mathrm{arctan}\ (\sqrt[6]{x+1})$$

Funguje pro $x\in(-1,\infty)$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$.

Řešení:

Použijeme substituci $t=\sqrt[4]{x}$. Potom

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{4}x^{-3/4}\,\mathrm{d}x$$

(nebo tedy $\mathrm{d}x = 4t^3\ \mathrm{d}t$). Odtud

$$\int \frac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4t^3}{(1+t)^3t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(1+t)^3} = \frac{A}{1+t}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{C}{(1+t)^3}.$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme

$$4t = A(1+t)^2+B(1+t)+C,$$

odkud dosazením $t=-1$ dostáváme, že $C=-4$. Dále máme, že

$$4t = (A+B+C)+(2A+B)t+At^2,$$

odkud ihned máme, že $A=0$ a $B=4$. Tudíž

$$\int \frac{4t}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t = \int\left(\frac{4}{(1+t)^2}-\frac{4}{(1+t)^3}\right)\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} -\frac{4}{1+t}+\frac{2}{(1+t)^2}$$

$$= -\frac{2+4t}{(1+t)^2} = -\frac{2+4\sqrt[4]{x}}{(1+\sqrt[4]{x})^2}.$$

Pro $x\in(0,\infty)$.

2. typ $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.

Řešení: Definičním oborem funkce f je interval $[1, +\infty)$, maximální otevřenou podmnožinou je interval $(1, +\infty)$. Primitivní funkci stačí určit na tomto intervalu.

Výraz nejprve upravíme vytknutím

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}$$

a poté použijeme substituci

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

odkud máme

$$x = -\frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad \mathrm{d}x = -\frac{2t(1-t^2) + 2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-4t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{-4t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t =$$

standardním rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{2}{(t+1)^3} - \frac{\frac{1}{2}}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

a po integraci

$$-\frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|t+1| + c$$

zbývá dosadit za t:

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} + \frac{1}{(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1)^2} - \frac{1}{2}\ln\left|1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right| + c$$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

Řešení:
Upravme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2/3}$$

a použijeme substituci

$$t = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/3}, \qquad x = \frac{t^3+1}{1-t^3}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{3t^2(1-t^3)+3t^2(1+t^3)}{(1-t^3)^2} = \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}.$$

Odtud také vyplývá, že

$$x-1 = \frac{t^3+1}{1-t^3} - 1 = \frac{2t^3}{1-t^3}.$$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2/3} \mathrm{d}x = \int \frac{(1-t^3)^2}{4t^6} \cdot t^2 \cdot \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{3}{2t^2}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} -\frac{3}{2t} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Pro $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$.

(c)

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

tedy

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int t\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{-4t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int \frac{-4t^2\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{-2}{1-t^2} + \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$2\mathrm{arctan}\ t - \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = 2\mathrm{arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right|$$

Pro $x \in (-1,0) \cup (0,1)$.

3. typ $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

(a)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Substituce $\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{1}x = t$

$$x = \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}$$

čili

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)} \frac{1}{t+\frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}} \frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$\int \frac{1}{2}\frac{(t+2)(t-2)}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1 + 2\frac{t-1}{(t-1)^2} - \frac{3}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2}\left(t + 2\ln|t-1| + \frac{3}{t-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+2x+4} - x + 2\ln|\sqrt{x^2+2x+4} - x - 1| + \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4} - x - 1}\right)$$

Pro $x \in \mathbb{R}$.

(b)

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}$$

Řešení: viz http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html
374

(c)

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

Řešení: viz http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html
375

(d)

$$f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x-1}}$$

Řešení: viz http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html
376

(374) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{-x^2+x+2}} \;\Big|\text{ polynom } -x^2+x+2 \text{ má reálné kořeny } 2,-1 \Big| =$$

$$= \int \frac{dx}{1+(x+1)\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}} \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{2-x}{x+1} \\ x = \frac{2-t^2}{t^2+1} \\ x+1 = \frac{3}{t^2+1} \\ dx = \frac{-6t}{(t^2+1)^2}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{-6t}{(t^2+1)^2}}{1+\frac{3}{t^2+1}t}\,dt =$$

$$= \int \frac{-6t}{(t^2+1)^2}\frac{t^2+1}{t^2+3t+1}\,dt = -6\int \frac{t}{(t^2+1)(t^2+3t+1)}\,dt =$$

$$= \int \left(-\frac{4}{5}\frac{\sqrt{5}}{2t+3+\sqrt{5}} - \frac{2}{t^2+1} - \frac{4}{5}\frac{\sqrt{5}}{-2t-3+\sqrt{5}}\right) dt =$$

$$= -\frac{4\sqrt{5}}{5}\frac{1}{2}\ln\left|2t+3+\sqrt{5}\right| - 2\operatorname{arctg} t - \frac{4\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)\ln\left|-2t-3+\sqrt{5}\right| + C =$$

$$= -\frac{2\sqrt{5}}{5}\ln\left|2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}+3+\sqrt{5}\right| + \frac{2\sqrt{5}}{5}\ln\left|-2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}-3+\sqrt{5}\right| - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + C.$$

(375) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} \quad \left|\begin{array}{c} \text{polynom } x^2+x+1 \text{ nemá reálné kořeny} \\ \sqrt{x^2+x+1} = x+t \\ x = \frac{1-t^2}{2t-1} \\ x-1 = -\frac{t^2+2t-2}{2t-1} \\ x+t = \frac{t^2-t+1}{2t-1} \\ dx = \frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}}{-\frac{t^2+2t-2}{2t-1}\,\frac{t^2-t+1}{2t-1}}\,dt = \int \frac{2}{t^2+2t-2}\,dt = \int \left(-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{-t-1+\sqrt{3}}\right) dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|t+1+\sqrt{3}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|-t-1+\sqrt{3}\right| =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x+1+\sqrt{3}}{x-\sqrt{x^2+x+1}-1+\sqrt{3}}\right| + C.$$

(376) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} \left| \begin{array}{c} \text{polynom } x^2-x+1 \text{ nemá reálné kořeny} \\ \sqrt{x^2-x+1}=t-x \\ x=\frac{t^2-1}{2t-1} \\ dx=\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}}{\frac{t^2-1}{2t-1}+t-\frac{t^2-1}{2t-1}}\,dt = 2\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}\,dt =$$

$$= \int \left(\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt \left| \begin{array}{c} u=2t-1 \\ du=2dt \end{array} \right| = 2\ln|t| + \int \left(-\frac{3}{2u}+\frac{3}{2u^2}\right)du =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|u| - \frac{3}{2u} = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| - \frac{3}{2(2t-1)} + C =$$

$$= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right| - \frac{1}{4x+2\sqrt{x^2-x+1}-2} + C.$$

4. Ostatní

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

Řešení:

Použijeme substituci
$$t = \sqrt{x} + \sqrt{1+x}.$$

Potom
$$x = \left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\cdot\frac{t^2-1}{2t}\cdot\frac{4t^2-2t^2+2}{4t^2} = \frac{t^2-1}{t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}$$

a máme
$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\frac{(t-1)(t^2+1)}{t^3}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}\ \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)\ \mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{1}{2}\left(t - \ln|t| - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x} - \ln|\sqrt{x}+\sqrt{1+x}| - \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}+(\sqrt{1+x})^2}\right).$$

Pro $x > 0$.