7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/,

Teorie

Definice 1. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k f na I*, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 2 (Rovnost až na konstantu)**.** Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 3 (Linearita neurčitého integrálu)**.** Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a α, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Poznámka 4.

1. Značení $\int f$ tady znamená množinu primitivních funkcí, $F = \int f$ znamená, že F je primitivní k f.
2. $\int \alpha f = \alpha \int f$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
3. Mají-li f, g primitivní funkce, pak $\int (f+g) = \int f + \int g$.

Hinty

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a} \qquad a^b = e^{b \ln a} \qquad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Příklady

1. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

   (a) $f(x) = x^{13}$
   Řešení:
   $$\int x^{13}\, \mathrm{d}x = \frac{x^{14}}{14} + c$$
   $x \in \mathbb{R}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x}$
   Řešení:
   $$\int \sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c$$
   $x > 0$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

Řešení:

$$\int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2x^2} + c$$

$x \neq 0$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Řešení:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

$x \neq 0$

(e) $f(x) = (1 + \sin x + \cos x)$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int (1 + \sin x + \cos x)\,dx = x - \cos x + \sin x + C.$$

$x \in \mathbb{R}$

(f) $f(x) = 7\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{2}{1+x^2}$

Řešení:

$$\int 7\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{7x^{5/3}}{5/3} - \frac{1}{2}\cos x - 2\mathrm{arctan}\ x + c$$

$x \in \mathbb{R}$

(g) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} - e^x$

Řešení:

$$\int \frac{2}{\cos^2 x} - e^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{tan}\ x - e^x + c$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{1+x^2} + 1 + x^2$

Řešení:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} + 1 + x^2 = \mathrm{arcsin}\ x + \mathrm{arctan}\ x + x + \frac{x^3}{3} + c$$

$x \in (-1, 1)$

(i) $f(x) = \sqrt{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Řešení:

$$\int \sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2} + c$$

$x > 0$

(j) $f(x) = \dfrac{3x^2+4x+2}{3x}$
Řešení:

$$\int \frac{3x^2+4x+2}{3x}\,\mathrm{d}x = \int x + \frac{4}{3} + \frac{2}{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{4x}{3} + \frac{2}{3}\ln|x| + c$$

$x \neq 0$

(k) $f(x) = (1-x)(1-2x)(1-3x)$
Řešení: Roznásobením

$$\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx = \int (1-6x+11x^2-6x^3)\,dx = x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C.$$

$x \in \mathbb{R}$

(l) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$
Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx = \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2}\right)\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C.$$

$x > 0$

(m) $f(x) = \dfrac{1}{x+A}$
Řešení: Víme, že primitivní funkce k funkci $\frac{1}{x}$ je $\ln|x| + C$. Tedy primitivní funkce k funkci $\frac{1}{ax+b}$ je $\frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$. Odtud vyplývá, že (položte $a = 1$, $b = A$)

$$\int \frac{1}{x+A}\,dx = \ln|x+A| + C.$$

$x \neq -A$

2. Dokažte, že pokud $F'(x) = f(x)$, potom $\left(\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right)' = f(ax+b)$, pokud $a \neq 0$.

   Řešení: Plyne z Věty o aritmetice derivací a derivace složené funkce.

3. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

   (a) $f(x) = \cos(3x)$
   Řešení:

$$\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin 3x + c$$

$x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \sin(2x - \pi)$
Řešení:
$$\int \sin(2x - \pi)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x - \pi) + c$$
$x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = e^{5-3x}$
Řešení:
$$\int e^{5-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{3}e^{5-3x} + c$$
$x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}$
Řešení:
$$\int \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{arctan}\ 2x + c$$
$x \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1-4x}$
Řešení:
$$\int \frac{1}{1-4x} = -\frac{1}{4}\ln|1-4x| + c$$
$x \neq \frac{1}{4}$

(f) $f(x) = (2x+1)^7$
Řešení:
$$\int (2x+1)^7\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}(2x+1)^8 + c$$
$x \in \mathbb{R}$

(g) $f(x) = e^{3x} + \dfrac{7}{x}$
Řešení:
$$\int e^{3x} + \frac{7}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{3x} + 7\ln|x| + c$$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(h) $f(x) = (e^{-x} + e^{-2x})$
Řešení: Pomocí lineární substituce $y = -x$, resp. $y = -2x$ dostaneme
$$\int (e^{-x} + e^{-2x})\,dx \overset{C}{=} -e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$
$x \in \mathbb{R}$

(i) $f(x) = (3 - x^2)^3$

Řešení: Tento příklad substituovat nelze, je třeba roznásobit.

$$\int (3 - x^2)^3\, dx = \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6)\, dx = 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{x^7}{7} + C.$$

$x \in \mathbb{R}$

(j) $f(x) = (\sin 5x - \sin 5\alpha)$

Řešení: Pomocí lineární substituce $y = 5x$ dostaneme

$$\int (\sin 5x - \sin 5\alpha)\, dx = -\frac{1}{5}\cos 5x - x \sin 5\alpha + c,$$

$x \in \mathbb{R}$,

neboť $\sin 5\alpha$ je konstantní funkce (nezávislá na proměnné x).

(k) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + (3x+7)^5$

Řešení:

$$\int \frac{1}{x-2} + (3x+7)^5\, \mathrm{d}x = \ln|x-2| + \frac{1}{18}(3x+7)^6 + c$$

$x \neq 2$

(l) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$

Řešení: Pomocí lineární substituce $y = 2x + \frac{\pi}{4}$ dostaneme

$$\int \frac{1}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}\, dx \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\mathrm{cotg}\,\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$2x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi$, tedy $x \neq k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, $k \in \mathbb{Z}$

(m) $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1-2x^2}}$ **Řešení:**

$$\int \frac{-2}{\sqrt{1-2x^2}}\, \mathrm{d}x = \int \frac{-2}{\sqrt{1-(\sqrt{2}x)^2}}\, \mathrm{d}x = \frac{-2}{\sqrt{2}}\arcsin\,(\sqrt{2}x) + c$$

$\sqrt{2}x \in (-1, 1)$, tedy $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

4. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

(a) $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} + \dfrac{4}{1 - \cos^2 x}$

Řešení:

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} + \frac{4}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x+1} + \frac{4}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int (e^x-1) + \frac{4}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$
$$= e^x - x - 4\cot x + c$$

$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-(3x-1)^2}}$

Řešení:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-(3x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sqrt{1-(\frac{3x-1}{2})^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x-1}{2}\right) + c$$

$x \in (-1/3, 1)$

(c) $f(x) = (1-\sqrt{x})^2$

Řešení:

$$\int (1-\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x = \int 1 - 2\sqrt{x} + x\,\mathrm{d}x = x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{x^2}{2} + c$$

$x > 0$

(d) $f(x) = \tan^2 x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \mathrm{tg}\, x - x + C.$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C.$$

$x \in \mathbb{R}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\, dx = \int \frac{x^2-1+4}{x^2-1}\, dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2-1}\right) dx = \int \left(1 - \frac{4}{1-x^2}\right) dx$$
$$= x - 2\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

$x \neq \pm 1$

(g) $f(x) = (2^x + 3^x)^2$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int (2^x + 3^x)^2 \, dx = \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) \, dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2 \cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

$x \in \mathbb{R}$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{2 + 3x^2}$

Řešení: Výraz převedeme na tvar $\frac{1}{1+c^2x^2}$ a poté užijeme substituci $y = cx$.

$$\int \frac{1}{2 + 3x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} \, dx \overset{C}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctan} \sqrt{\frac{3}{2}}x = \sqrt{\frac{1}{6}} \operatorname{arctan} \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$x \in \mathbb{R}$

(i) $f(x) = \operatorname{cotg}\,^2 x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \operatorname{cotg}\,^2 x \, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx$$
$$= -\operatorname{cotg}\, x - x + C.$$

$x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 - 5x}}$

Řešení: Protože je

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy = 2\sqrt{y},$$

platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}} \, dx \overset{C}{=} \frac{1}{-5} \cdot 2\sqrt{2 - 5x} = -\frac{2}{5}\sqrt{2 - 5x}$$

$x < 2/5$

(k) $f(x) = \left(\dfrac{a}{x} + \dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{a^3}{x^3} \right)$, $a \in \mathbb{R}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right) dx = a \ln |x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C.$$

$x \neq 0$

5. Najděte takovou funkci, aby $f'(x) = 6x(1 - x)$ a $f(0) = 1$.

   Řešení: $\int 6x(1 - x) \, \mathrm{d}x = -2x^3 + 3x^2 + c$. Ježto máme $f(0) = 1$, tak $1 = -2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + c = c$. Hledaná funkce je tedy $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

6. Najděte chyby

(a) $\displaystyle\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 e^x + c$

Řešení: Integrál součinu není součin integrálů, stejně jako u derivací.

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = x \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = x \arcsin x + c$

Řešení: x nelze vytknout před integrál, to můžeme jen u konstanty.