

1a

**Příklad 2 :**

- Nejprve upravíme:

$$\cos(3n + 2) = \cos 3n \cos 2 - \sin 3n \sin 2.$$

Víme, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$  má omezené částečné součty pro každé  $x \in \mathbf{R}$  a že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$  má omezené částečné součty pro každé  $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ . Proto mají řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n$  i řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 3n$  omezené částečné součty.

- Posloupnost  $\left\{ \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje k nule a je pro všechna  $n > 2$  klesající (jak lze ověřit například derivováním funkce  $\frac{x}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ ), proto podle Dirichletova kritéria konvergují řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos 3n$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \sin 3n$ , a tedy i řada

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos(3n + 2) &= \\ &= \cos 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos 3n - \sin 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \sin 3n \end{aligned}$$

konverguje, neboť je lineární kombinací konvergentních řad.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- použití součtového vzorce pro kosinus ..... 5 bodů
- omezenost částečných součtů  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(3n)$  resp.  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(3n)$  ..... 2 body
- $\frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}}$  jde monotónně k nule ..... 5 bodů
- použití (zmínění) Dirichletova kritéria ..... 2 body
- lineární kombinace konvergentních řad je konvergentní řada ..... 1 bod

# Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (4)

## LS 2008-09, 17. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

**Příklad 1 :** Platí

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(\sin x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) - \frac{1}{3} \left( x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \right)^3 + \frac{1}{5} (x + o(x^2))^5 + o(\sin^5 x) \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dále máme

$$\begin{aligned} \sin \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right) &= x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6} \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right)^3 + \frac{1}{120} \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right)^5 + o(x^5) \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{40}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pak dostáváme

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{1}{5}x^5.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0, \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pro jmenovatele dostáváme

$$(\arcsin x) \cdot (\cos x) - \operatorname{arctg} x = -\frac{1}{6}x^5 + o(x^5).$$

Z výše uvedených rozvojų plyne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(\arcsin x) \cdot (\cos x) - \operatorname{arctg} x} = -\frac{6}{5}.$$

**Příklad 2 :** Použijeme Dirichletovo a potom Abelovo kritérium:

- 15
- Víme, že posloupnost  $\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$  má omezené částečné součty.
  - Ukážeme, že posloupnost  $\left\{ \log \left( \frac{e^n - 1}{e^n + 1} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje k nule a je rostoucí: pro  $x > 0$  označme  $f(x) := \log \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)$ ; potom  $f'(x) = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} > 0$  (pro všechna  $x > 0$ ). Posloupnost

15

$a_n := f(n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , je tedy rostoucí a snadno se spočte  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \cdot \cos n \text{ konverguje.} \tag{1}$$

- Posloupnost  $\left\{ \arctg\left(\frac{e^n}{e^n + 1}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$  je monotónní a omezená (monotonii lze opět dostat například zderivováním příslušné funkce, omezenost plyne z toho, že posloupnost má vlastní limitu – jakou?). Podle Abelova kritéria a (1) tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctg\left(\frac{e^n}{e^n + 1}\right) \cdot \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \cdot \cos n \text{ konverguje.} \tag{2}$$

**Poznámka.** Řada dokonce konverguje absolutně, což byl jiný (otázkou je, jestli jednodušší) způsob, jak zjistit její konvergenci. Pro všechna  $n \in \mathbf{N}$  totiž platí:

$$\left| \arctg\left(\frac{e^n}{e^n + 1}\right) \cdot \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \cdot \cos n \right| \leq \frac{\pi}{2} \left| \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \right| = \frac{\pi}{2} \log\left(\frac{e^n + 1}{e^n - 1}\right) \tag{3}$$

a dále

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{e^n + 1}{e^n - 1}\right)}{\frac{2}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{2}{e^n - 1}\right)}{\frac{2}{e^n - 1}} \cdot \frac{2}{e^n} = 1 \tag{4}$$

(spočtete pečlivě). Použijte dále skutečnost, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n}$  konverguje (například podle podílového kritéria). Výsledek pak dá limitní srovnávací a srovnávací kritérium s použitím (3) a (4).

**Příklad 3 :** Použijeme substituci  $e^x = y$ ,  $e^x dx = dy$ . Dostaneme

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x + 2)^2(e^x + 1)^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{y^2}{(y + 2)^2(y + 1)^2} dy.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{y^2}{(y + 2)^2(y + 1)^2} = \frac{4}{(y + 2)^2} + \frac{4}{y + 2} + \frac{1}{(y + 1)^2} - \frac{4}{y + 1}.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \left[ -\frac{4}{y + 2} + 4 \log(y + 2) - \frac{1}{y + 1} - 4 \log(y + 1) \right]_0^{\infty} \\ &= \left[ -\frac{4}{y + 2} - \frac{1}{y + 1} + 4 \log\left(\frac{y + 2}{y + 1}\right) \right]_0^{\infty} = 3 - 4 \log 2. \end{aligned}$$

**Příklad 4 :** Označíme

$$f(x) = (\arcsin x - x)^\alpha \frac{\sin^\beta(\pi x)}{(1 - x)^\alpha}$$

pro  $x \in (0, 1)$ . Funkce  $f$  je na intervalu  $(0, 1)$  kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

**Příklad 3 :** Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n,$$

kde  $\log x (= \ln x)$  je přirozený logaritmus (logaritmus o základu  $e$ ). (15 bodů)

**Řešení :** Položme

$$a_n := \frac{n+1}{n+3} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n.$$

Protože  $\frac{n+3}{n+1} > 1$ , je  $a_n > 0$ . Použijeme odmocninové kritérium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}}}_{=: b_n} \underbrace{\log \frac{n+3}{n+1}}_{=: c_n}.$$

Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n+3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \log 1 = 0,$$

kde jsme využili faktu, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , aritmetiky limit a spojitosti logaritmu v bodě 1. Dále pro každé  $n$  přirozené platí  $0 < \frac{n+1}{n+3} < 1$ , tedy i

$$0 < \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}} < 1,$$

odkud plyne, že posloupnost  $b_n$  je omezená<sup>2</sup>. Podle věty, že limita součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule, je nula, tedy máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0,$$

což podle limitního odmocninového kritéria znamená, že zadaná řada konverguje.

**Poznámka:** Jinou možností bylo nejprve použít (limitního) srovnávacího kritéria, tj. buď si uvědomit, že pro všechna přirozená  $n$  platí

$$0 < \frac{n+1}{n+3} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n < \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n,$$

nebo že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n+3} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n}{\left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n} = 1.$$

Ať již použijeme jeden či druhý argument, vidíme, že konvergence řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$  implikuje konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$ . Konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$  však dostaneme z odmocninového kritéria, jako výše.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- aplikace odmocninového kritéria ..... 3 body
- $a_n > 0$ , aritmetika limit ..... 2 + 2body
- výpočet limity logaritmu ..... 4 bodů
- výpočet limity  $n$ -té odmocniny ..... 4 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění výpočtu limity (omezená krát posloupnost s nulovou limitou) .... 4 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

<sup>2</sup>Samozřejmě je také možno spočítat limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$  například rozpisem obecné mocniny na exponenciálu a logaritmus, a obdržíme také  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$ .

**Příklad 3 :** Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

(15 bodů)

**Řešení :** Použijeme limitní srovnávací kritérium, členy vyšetřované řady budeme srovnávat s  $\frac{1}{n^{4/3}}$ . Čtenáři je tak v této chvíli dána možnost přijít na to, proč zrovna tato mocnina  $n$  je ta pravá... Pokud se necháte poddat, tak vezte, že pro velká  $n$  se

$$\frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} \text{ „chová jako“ } \frac{1}{n},$$

zatímco (stále pro velká  $n$ ) se

$$\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{ „chová jako“ } \frac{1}{\sqrt[3]{n}}. \quad (2)$$

Nyní je potřeba tyto naše odhady matematicky přesně odůvodnit. Počítejme tedy, a nezapomeňme ani na odůvodnění výpočtu:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n^{4/3}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n}(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2 + \frac{1}{n} + \sqrt{2 - \frac{1}{n}}}}}_{=: A_n} \underbrace{\frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}_{=: B_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , dostali jsme  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{2}{2\sqrt{2}}$ . Použili jsme větu o aritmetice limit, Heineovu větu a spojitost odmocniny. Pro posloupnost  $B_n$  platí (průběh a výsledek tohoto výpočtu je přesně to, co stojí za „odhadem“ v (2)):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Rovnost v (\*) plyne ze základní limity  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  a Heineovy věty použité na posloupnost  $\{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\}$ , která sestává z nenulových členů a konverguje k 0. Tím je odůvodněn výpočet (3).

Protože limita v (3) je vlastní a nenulová, a protože obě srovnávané řady jsou řady s kladnými členy, konverguje námi vyšetřovaná řada právě tehdy, když konverguje řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ . Tato řada však konverguje podle věty, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  je konvergentní právě tehdy, když  $\alpha > 1$ .

Závěr: námi vyšetřovaná řada tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- odhad s jakou řadou srovnat ..... 5 body
- číselný výpočet limity v (3) ..... 6 bodů
- závěr, že řada konverguje ..... 4 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  ..... 1 bod
- aritmetika limit ..... 1 bod
- Heineho věta ..... 1 bod
- limita složené funkce ..... 1 bod
- limitní srovnání: řady s nezápornými členy, limita vlastní a nenulová ..... 1 bod
- uvedení, že  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  je konvergentní právě tehdy, když  $\alpha > 1$  ..... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

## Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (3) LS 2008-09, 10. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

**Příklad 1 :** Dostaneme postupně tyto Taylorovy rozvoje:

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3), \quad y \rightarrow 0,$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} \cos x \cdot \cos x^2 &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{24}x^4 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\sqrt{1+x^2} - \cos x \cdot \cos x^2 - x^2 = \frac{1}{3}x^4 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

Odtud dostáváme

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{1}{3}x^4.$$

Pokud jde o jmenovatele, tak dostáváme

$$\begin{aligned} \sqrt{e^{x^2}} &= \sqrt{1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right) - \frac{1}{8} \left(x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right)^2 + \frac{1}{16} \left(x^2 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^5)\right)^3 + o(x^6) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pak platí

$$\sqrt{e^{x^2}} - \cos(x) - x^2 = \frac{1}{12}x^4 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

Z výše uvedených rozvojų plyne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{\exp(x^2)} - \cos(x) - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^5)}{\frac{1}{12}x^4 + o(x^5)} = 4.$$

**Příklad 2 :** Použijeme Dirichletovo kritérium:

- Víme, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$  má omezené částečné součty pro všechna  $x \in \mathbf{R}$ , proto i řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n$  má omezené částečné součty.
- Platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} - \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0+} \left( 1 - \frac{\log(1+y)}{y} \right) = 0, \end{aligned}$$

1e

tedy i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} - \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) n = 0$$

podle Heineho věty.

- Označíme  $f(x) := 1 - x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$ , potom

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x+1} - (\log(x+1) - \log x).$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro libovolné  $x \in (0, \infty)$  existuje  $\xi_x \in (0, 1)$  takové, že

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+\xi_x} < 0 \quad \text{pro všechna } x > 0.$$

Funkce  $f$  je tedy klesající na intervalu  $(0, \infty)$ , a proto je i posloupnost  $a_n = f(n)$  klesající.

**Závěr:** řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

**Poznámka:** Monotonii funkce můžeme zdůvodnit i takto. Platí

$$f''(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}, \quad x \in (0, \infty).$$

Funkce  $f'$  je tedy rostoucí na  $(0, \infty)$  a  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ . Odtud plyne, že  $f'$  je záporná na  $(0, \infty)$ , a tedy  $f$  je na  $(0, \infty)$  klesající.

**Příklad 3 :** Použijeme substituci  $\sqrt{2x+1} = t$ , tj.  $x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$ ,  $dx = t dt$ . Dostaneme

$$I := \int_0^1 \frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t^2}{(t^2+3)^2} dt.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{4t^2}{(t^2+3)^2} = \frac{4}{t^2+3} - \frac{12}{(t^2+3)^2}.$$

Zintegrovat  $\frac{4}{t^2+3}$  není obtížné, primitivní funkci k funkci  $\frac{12}{(t^2+3)^2}$  najdeme například pomocí rekurentní formule pro integrály typu  $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ . Celkově dostaneme

$$\int \left( \frac{4}{t^2+3} - \frac{12}{(t^2+3)^2} \right) dt \stackrel{c}{=} \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{2t}{t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Tedy je

$$I = \left[ \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{2t}{t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**Příklad 4 :** Označíme

$$f(x) = \frac{\log^\alpha(1+x) \sin^\beta x}{x^2(\pi-x)^3}$$

pro  $x \in (0, \pi)$ . Funkce  $f$  je na intervalu  $(0, \pi)$  kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

**Bod 0.** Položme  $g(x) = \frac{x^\alpha x^\beta}{x^2} = x^{\alpha+\beta-2}$ . Funkce  $g$  je na intervalu  $(0, 1]$  kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)/g(x) = \pi^{-3} \in (0, \infty)$ . Podle limitního srovnávacího kritéria

# Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (2)

## LS 2008-09, 3. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

**Příklad 1 :** Dostaneme postupně tyto Taylorovy rozvoje:

$$\exp(x^2) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6), \quad x \rightarrow 0,$$

a proto

$$\exp(x^2) \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{2} + o(x^5) = x + \frac{5}{6}x^3 + \frac{41}{120}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

Dále platí

$$\sin(xe^{x^2}) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^6) - \frac{1}{6}(x + x^3 + o(x^4))^3 + \frac{1}{120}(x + o(x^2))^5 + o((xe^{x^2})^5), \quad x \rightarrow 0.$$

Platí  $\lim_{x \rightarrow 0} xe^{x^2}/x = 1$  a můžeme tedy psát  $o(x^5)$  místo  $o((xe^{x^2})^5)$ . Pak máme

$$\sin(xe^{x^2}) = x + \frac{5}{6}x^3 + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

Dohromady:

$$\exp(x^2) \sin x - \sin(x \exp(x^2)) = \frac{x^5}{3} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0,$$

a proto

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{x^5}{3}.$$

Rozvojem jmenovatele dostaneme

$$\log(1 + x^3) - \sin(x^2 \sin x) = x^3 + o(x^5) - \sin\left(x^3 - \frac{x^5}{6} + o(x^6)\right) = \frac{x^5}{6} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

a tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x^2) \sin x - \sin(x \exp(x^2))}{\log(1 + x^3) - \sin(x^2 \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^5}{3} + o(x^5)}{\frac{x^5}{6} + o(x^5)} = 2.$$

**Příklad 2 :** Použijeme dvakrát Dirichletovo a potom Abelovo kritérium:

- (12)
- Posloupnost  $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$  má omezené částečné součty; posloupnost  $\frac{1}{n}$  konverguje k nule a je klesající. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \text{ konverguje.} \quad (1)$$

- Posloupnost  $\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$  má omezené částečné součty; posloupnost  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  konverguje k nule a je klesající. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \text{ konverguje.} \quad (2)$$



18

- Součet konvergentních řad (1) a (2) je konvergentní řada, tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \sqrt{n} \cos n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin n}{n} + \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \right) \text{ konverguje.} \quad (3)$$

- Protože posloupnost  $\cos \frac{1}{n}$  je omezená a rostoucí (odůvodněte podrobně!), konverguje podle Abelova kritéria (s využitím znalosti (3)) i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \sqrt{n} \cos n}{n} \cdot \cos \frac{1}{n}$$

Závěr: řada konverguje.

**Příklad 3 :** Použijeme substituci  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  na intervalu  $(-\pi, \pi)$ . Potom máme

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Tato substituce převede uvažovaný integrál na

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 + 3}{(t^2 + 1)(t^2 + t + 2)} dt.$$

Integrand rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{t^2 + 3}{(t^2 + 1)(t^2 + t + 2)} = \frac{t + 1}{t^2 + t + 2} + \frac{1 - t}{t^2 + 1}.$$

Standardní integrací racionálních zlomků pak dostaneme

$$\int \left( \frac{t + 1}{t^2 + t + 2} + \frac{1 - t}{t^2 + 1} \right) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log(t^2 + t + 2) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2t + 1}{\sqrt{7}} \right) - \frac{1}{2} \log(t^2 + 1) + \operatorname{arctg} t \quad \text{na } \mathbf{R}.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 + 3}{(t^2 + 1)(t^2 + t + 2)} dt &= \left[ \frac{1}{2} \log \left( \frac{t^2 + t + 2}{t^2 + 1} \right) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2t + 1}{\sqrt{7}} \right) + \operatorname{arctg} t \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \pi \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{7}} \right). \end{aligned}$$

**Poznámka:** Pozor! Rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{t + 1}{t^2 + t + 2} + \frac{1 - t}{t^2 + 1} \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t + 1}{t^2 + t + 2} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - t}{t^2 + 1} dt$$

neplatí, neboť integrály na pravé straně neexistují.

**Příklad 4 :** Integrand  $f(x) = \operatorname{tg}^{\alpha} x \sin^{\beta} x$  je spojitý a kladný na intervalu  $(0, \pi/2)$  pro každé  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ . Integrál tedy  $\int_0^{\pi/2} f$  tedy konverguje, právě když konvergují integrály  $\int_0^{\pi/4} f$  a  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f$ .

- Integrál  $\int_0^{\pi/4} f$ . Pro srovnání použijeme kladnou a spojitou funkci  $g(x) = x^{\alpha+\beta}$  definovanou na  $(0, \pi/4]$ . Platí  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)/g(x) = 1$ , a tedy podle limitního srovnávacího kritéria  $\int_0^{\pi/4} f$  konverguje, právě když konverguje integrál  $\int_0^{\pi/4} x^{\alpha+\beta} dx$ . Poslední integrál konverguje, právě když  $\alpha + \beta > -1$ .

2a

**Příklad 3 :** Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 1}{(n + 2)! + 2}$$

(15 bodů)

**Řešení :** Použijeme limitní srovnávací kritérium, členy vyšetřované řady budeme srovnávat s  $\frac{1}{n^2}$ . Pro velká  $n$  se totiž

$$a_n := \frac{n! + 1}{(n + 2)! + 2} \text{ „chová jako“ } \frac{n!}{(n + 2)!} = \frac{1}{(n + 2)(n + 1)} \text{ což se „chová jako“ } \frac{1}{n^2} =: b_n.$$

Nyní je potřeba tento náš odhad odůvodnit. Počítejme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n! + 1)n^2}{(n + 2)! + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n!}}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n^2 \cdot n!}} = 1, \tag{1}$$

s využitím faktu, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$  a podle věty o aritmetice limit.

Protože limita v (1) je vlastní a nenulová, a protože obě srovnávané řady jsou řady s kladnými členy, konverguje námi vyšetřovaná řada právě tehdy, když konverguje řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Tato řada však konverguje podle věty, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  je konvergentní právě tehdy, když  $\alpha > 1$ .

Závěr: námi vyšetřovaná řada tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- odhad s jakou řadou srovnat ..... 5 bodů
- číselný výpočet limity v (1) ..... 5 bodů
- závěr ..... 5 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  apod. .... 1 bod
- aritmetika limit ..... 1 bod
- limitní srovnání: řady s nezápornými členy, limita vlastní a nenulová ..... 1 bod
- uvedení, že  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  je konvergentní právě tehdy, když  $\alpha > 1$  ..... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

2b

**Příklad 2 :** Použijeme Dirichletovo i Abelovo kritérium:

- Nejprve upravíme:

$$\sin(2n + 1) = \sin 2n \cos 1 + \cos 2n \sin 1.$$

Víme, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$  má omezené částečné součty pro každé  $x \in \mathbf{R}$  a že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$  má omezené částečné součty pro každé  $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ . Proto mají řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n$  i řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n$  omezené částečné součty. **Pozor**, nebylo možno argumentovat tak, že omezenost částečných součtů řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n + 1)$  plyne z toho, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$  má omezené částečné součty pro každé  $x \in \mathbf{R}$ .

- Posloupnost  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje k nule a je klesající, proto podle Dirichletova kritéria konvergují řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n}$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ , a tedy i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n + 1)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos 1 \cdot \frac{\sin 2n}{n} + \sin 1 \cdot \frac{\cos 2n}{n} \right) \text{ konverguje.} \quad (1)$$

- Protože  $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$  je rostoucí posloupnost a funkce  $\arctg$  je rostoucí a omezená funkce, je posloupnost  $\{\arctg \sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$  rostoucí a omezená. Podle Abelova kritéria a (1) tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg \sqrt{n}}{n} \sin(2n + 1) \text{ konverguje.}$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- použití součtového vzorce pro sinus ..... 5 bodů
- omezenost částečných součtů  $\sin 2n$  resp.  $\cos 2n$  ..... 2 body
- $1/n$  jde monotónně k nule ..... 1 bod
- použití Dirichletova kritéria ..... 1 bod
- monotonie  $\arctg \sqrt{n}$  ..... 3 body
- omezenost  $\arctg \sqrt{n}$  ..... 2 body
- použití Abelova kritéria ..... 1 bod

2c

**Příklad 3 :** Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}}{\binom{n}{4} + \binom{n}{5}},$$

kde  $\binom{n}{k}$  je kombinační číslo „ $n$  nad  $k$ “.

(15 bodů)

**Řešení :**

Položme

$$a_n := \frac{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}}{\binom{n}{4} + \binom{n}{5}}.$$

Úpravou čitatele i jmenovatele tohoto zlomku použitím vzorce  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$  dostaneme

$$a_n = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}} = \frac{60+20(n-2)}{5(n-2)(n-3)+(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{20}{(n-2)(n-3)}.$$

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Za tím účelem nejprve odhadneme, jak se  $a_n$  chová pro velké hodnoty  $n$ . „Tipneme si“, že pro dostatečně velká  $n$  je možno zanedbat aditivní konstanty  $(\dots - 2)$ ,  $(\dots - 3)$  ve výrazech výše,

$$a_n \text{ se tedy „chová jako“ } \frac{1}{n^2}.$$

Označme tedy  $b_n := \frac{1}{n^2}$ . Lze ihned konstatovat, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \tag{6}$$

podle věty, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  konverguje právě tehdy, když  $\alpha > 1$ .

To, že se řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  „chovají stejně“, je ale nutné přesně ověřit:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{20n^2}{(n-2)(n-3)} = \frac{20}{\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}.$$

Odtud ihned dostaneme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 20, \tag{7}$$

protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$  pro  $\beta > 0$ .

Obě řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  mají nezáporné členy, limita v (7) je vlastní a nenulová, plyne tedy z (6)

podle limitního srovnávacího kritéria, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava  $a_n$  ..... 4 body
- určení  $b_n$  a spočtení (7) ..... 5 bodů
- odůvodnění: zmínka, že  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  konverguje právě tehdy, když  $\alpha > 1$  ..... 1 bod
- odůvodnění: zmínka, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$  pro  $\beta > 0$  ..... 1 bod
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konverguje ..... 1 bod
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: (7) je vlastní a nenulová .... 2 body
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: jde o řady s nezápornými členy 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

2d

**Příklad 2 :** Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n + 1} \sin(n\sqrt{\pi}).$$

(15 bodů)

**Řešení :** Využijeme znalost, že posloupnost (částečných součtů)  $\sum_{n=1}^N \sin nx$  je pro pevné  $x \in \mathbf{R}$  omezená – tedy že pro dané  $x \in \mathbf{R}$  existuje  $K > 0$  takové, že pro všechna  $N \in \mathbf{N}$  platí

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin nx \right| < K.$$

Pro  $x = \sqrt{\pi}$  tedy dostaneme, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\sqrt{\pi})$  má omezenou posloupnost částečných součtů.

Pro ověření konvergence řady použijeme Dirichletovo kritérium, tedy bude stačit, pokud ukážeme, že

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10}}{2^n + 1} = 0,$

(ii)  $\frac{n^{10}}{2^n + 1}$  je monotónní posloupnost, alespoň od jistého indexu  $n_0$ .

Ad (i): Výpočet uvedené limity není obtížný, snadno ji spočtete některou z metod 1. semestru.

Ad (ii): označme  $a_n := \frac{n^{10}}{2^n + 1} > 0$ , potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{10} \cdot (2^n + 1)}{n^{10} \cdot (2^{n+1} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2 + \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1, \quad (1)$$

tedy jistě existuje  $n_0 \in \mathbf{N}$  takové, že  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  pro všechna  $n \geq n_0, n \in \mathbf{N}$ , tedy  $a_{n+1} < a_n$  pro všechna  $n \geq n_0, n \in \mathbf{N}$ .

Jiný způsob, jak zjistit monotonii, je zkoumat znaménko derivace pomocné funkce

$$f(x) = \frac{x^{10}}{2^x + 1}, \quad \text{tj.} \quad f'(x) = \frac{x^9 2^x}{(2^x + 1)^2} \left[ 10 + \frac{10}{2^x} - x \log 2 \right], \quad x \in \mathbf{R}.$$

Protože výraz v hranatých závorkách jde k mínus nekonečnu pro  $x \rightarrow +\infty$ , existuje určitě takové  $x_0 \in \mathbf{R}$ , že  $f'(x) < 0$  pro všechna  $x > x_0$ . Funkce  $f$  tedy klesá na intervalu  $(x_0, +\infty)$ , proto  $a_{n+1} = f(n+1) < f(n) = a_n$  pro všechna  $n \in \mathbf{N}, n > x_0$ .

Závěr: řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

**Poznámka :** Tento postup ukazuje, jak asi pracovat (zdůvodňovat) v případě použití Abel-Dirichletova kritéria. Pro tuto konkrétní řadu však existovalo mnohem jednodušší řešení: protože

$$\left| \frac{n^{10}}{2^n + 1} \sin(n\sqrt{\pi}) \right| \leq \frac{n^{10}}{2^n + 1} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbf{N},$$

a řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n + 1}$  konverguje dle podílového kritéria – viz (1), konverguje řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n + 1} \sin(n\sqrt{\pi})$  absolutně, a tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- zdůvodnění omezenosti částečných součtů ..... 2 body
- výpočet limity ..... 4 body
- ověření monotonie ..... 6 bodů
- aplikace kritéria a závěr ..... 3 body

2e

**Příklad 3 :** Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1} - n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2} - \sqrt[3]{n^{3/4}+1}}$$

(15 bodů)

**Řešení :**

Položme

$$a_n := \frac{\sqrt[3]{n^3+1} - n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2} - \sqrt[3]{n^{3/4}+1}}$$

Rozšířením čitatele i jmenovatele tohoto zlomku dvojnásobným použitím vzorce  $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$  (například pro úpravu čitatele klademe  $A = \sqrt[3]{n^3+1}$ ,  $B = n$ ) dostaneme

$$a_n = \frac{1}{(n^3+1)^{\frac{2}{3}} + n(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + n^2} \cdot \frac{(n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{2}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{1}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{2}{3}}}{1}$$

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Za tím účelem nejprve odhadneme, jak se  $a_n$  chová pro velké hodnoty  $n$ . „Tipneme si“, že pro dostatečně velká  $n$  je možno zanedbat aditivní konstanty  $(\dots + 2)$  a  $(\dots + 1)$  ve výrazech výše,  $a_n$  se tedy „chová jako“

$$b_n := \frac{n^{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Mimo jiné je nyní vidět, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \tag{6}$$

podle věty, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  konverguje právě tehdy, když  $\alpha > 1$ .

To, že se řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  „chovají stejně“, je ale nutné přesně ověřit:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\left[ (n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{2}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{1}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot n^{\frac{3}{2}}}{(n^3+1)^{\frac{2}{3}} + n(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + n^2} = \\ &= \frac{\left[ \left(1 + \frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{3}{2}}}{\left[ \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1 \right] \cdot n^2} \end{aligned}$$

Po vykrácení tohoto zlomku výrazem  $n^2$  tedy dostaneme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \tag{7}$$

protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$  pro  $\beta > 0$ .

Obě řady mají nezáporné členy, takže z (7) a z (6) plyne podle limitního srovnávacího kritéria, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava  $a_n$  (rozšíření zlomku) ..... 4 body
- určení  $b_n$  ..... 4 body
- ověření (7) ..... 4 body
- odůvodnění ..... 3 body

22

**Příklad 2 :** Použijeme Dirichletovo kritérium:

- Víme, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$  má omezené částečné součty pro každé  $x \in \mathbf{R}$ . Proto i řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n$  má omezené částečné součty.
- Ukážeme, že posloupnost  $\left\{n \sin \frac{1}{n} - 1\right\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje k nule a je monotónní:
- Limita se spočítá snadno, je totiž

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \sin \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0$$

a proto i (podle Heineho věty)  $\lim (n \sin \frac{1}{n} - 1) = 0$ .

- Pro zjištění monotonie označme

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} - 1, \quad \text{pak} \quad f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

a

$$f''(x) = -\frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x} < 0 \quad \text{pro } x > \frac{1}{\pi}.$$

Odtud plyne, že funkce  $f'$  je klesající na intervalu  $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$  a protože  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ , je funkce  $f'$  kladná na intervalu  $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$ . To ovšem znamená, že funkce  $f$  je rostoucí na intervalu  $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$ , což jsme chtěli ukázat.

Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( n \sin \frac{1}{n} - 1 \right) \sin 3n \quad \text{konverguje.} \quad (1)$$

**Poznámka.** Řada dokonce konverguje absolutně, což byl jiný (otázkou je, jestli jednodušší) způsob, jak zjistit její konvergenci. Pro všechna  $n \in \mathbf{N}$  totiž platí:

$$\left| \left( n \sin \frac{1}{n} - 1 \right) \sin 3n \right| \leq \left| n \sin \frac{1}{n} - 1 \right| = 1 - n \sin \frac{1}{n},$$

a protože

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6},$$

je (podle Heineho věty) i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{6} \in (0, +\infty),$$

řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \sin \frac{1}{n})$  tedy konverguje právě když konverguje řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Tato však konverguje, proto konverguje i  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \sin \frac{1}{n})$ , a tedy  $\sum_{n=1}^{\infty} (n \sin \frac{1}{n} - 1) \sin 3n$  konverguje absolutně.

# Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (1)

## LS 2008-09, 27. 5. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

**Příklad 1 :** Dostaneme postupně tyto Taylorovy rozvoje:

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{1 + \left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)} = \dots = 1 - x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0,$$

(s využitím rozvoje  $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2)$ ,  $y \rightarrow 0$ , a vlastností symbolu „ $o$ “). Dále dostaneme:

$$2 \exp(x^2) = 2 + 2x^2 + x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0,$$

což dohromady dá

$$\sqrt{\cos 2x} - 2 \exp(x^2) + 1 + 3x^2 = -\frac{7}{6}x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0,$$

a proto

$$T_4^{f,0}(x) = -\frac{7}{6}x^4.$$

Rozvojem jmenovatele dostaneme

$$\cos x^2 - \cos x - \frac{x^2}{2} = -\frac{13}{24}x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0,$$

a tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 2 \exp(x^2) + 1 + 3x^2}{\cos(x^2) - \cos x - \frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{7}{6}x^4 + o(x^4)}{-\frac{13}{24}x^4 + o(x^4)} = \frac{28}{13}.$$

**Příklad 2 :** Použijeme nejprve Dirichletovo a potom Abelovo kritérium:

- Posloupnost  $\{\cos(\frac{2n\pi}{3})\}_{n=1}^{\infty}$  má omezené částečné součty; posloupnost  $\frac{1}{2n + \frac{100}{n}}$  konverguje k nule a od jistého indexu je monotónní (neboť například derivace funkce  $f(x) := 2x + \frac{100}{x}$  je  $f'(x) = 2 - \frac{100}{x^2}$ ; pro všechna  $x > \sqrt{50}$  je  $f'(x) > 0$ , proto je funkce  $2x + \frac{100}{x}$  rostoucí na  $(\sqrt{50}, \infty)$  a funkce  $\frac{1}{2x + \frac{100}{x}}$  klesající na  $(\sqrt{50}, \infty)$ ). Podle Dirichletova kritéria (odůvodněte vše podrobně) tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + \frac{100}{n}} \cdot \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \text{ konverguje.} \quad (1)$$

- Protože posloupnost  $(\frac{n}{n+1})^3$  je rostoucí a omezená, konverguje podle Abelova kritéria (s využitím znalosti (1)) i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{n}{n+1})^3}{2n + \frac{100}{n}} \cdot \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Závěr: řada konverguje.

2g



**Poznámka:** bylo možno také použít rovnou Dirichletovo kritérium:

Posloupnost  $\{\cos(\frac{2n\pi}{3})\}_{n=1}^{\infty}$  má omezené částečné součty a derivace funkce  $\frac{(\frac{x}{x+1})^3}{2x+\frac{100}{x}}$  je od jistého  $x_0 \in \mathbf{R}$  záporná, tedy tato funkce klesá na okolí nekonečna, a snadno se také ukáže, že má v nekonečnu nulovou limitu. V tomto případě je ovšem výpočet derivace výše uvedené funkce a zjištění jejího chování v blízkosti nekonečna poněkud obtížnější, i když proveditelné.

**Příklad 3 :** Integrovaná funkce je definovaná na  $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$ , primitivní funkci tedy hledáme na  $(-\infty, -2)$  a na  $(-1, \infty)$ .

Při použití substituce  $t = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$  dostaneme postupně (všimněte si, že pro žádné  $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$  nemůže být  $t^2$  být rovno 1):

$$x = \frac{t^2 - 2}{1 - t^2}, \quad dx = -\frac{2t}{(1 - t^2)^2} dt,$$

$$(x + 1)(4x + 5)(2x + 3) = -\frac{(t^2 + 3)(t^2 + 1)}{(1 - t^2)^3}, \quad (3x + 4) = -\frac{t^2 + 2}{1 - t^2},$$

a tedy

$$\int \frac{3x + 4}{(x + 1)(4x + 5)(2x + 3)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}} dx = -2 \int \frac{t^2 + 2}{(t^2 + 1)(t^2 + 3)} dt.$$

Rozklad na parciální zlomky dá

$$-2 \int \frac{t^2 + 2}{(t^2 + 1)(t^2 + 3)} dt = -\int \frac{1}{t^2 + 1} dt - \int \frac{1}{t^2 + 3} dt \stackrel{c}{=} -\arctg t - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{t}{\sqrt{3}}, \quad t \in \mathbf{R},$$

a tedy

$$\int \frac{3x + 4}{(x + 1)(4x + 5)(2x + 3)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}} dx \stackrel{c}{=} -\arctg \left( \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \right)$$

na  $(-\infty, -2)$  a na  $(-1, \infty)$ .

**Příklad 4 :** Označíme

$$I := \int_0^{\infty} (\arctg x)^a \frac{\sin x}{2x + 1} dx, \quad (2)$$

$$I_1 := \int_0^1 (\arctg x)^a \frac{\sin x}{2x + 1} dx, \quad (3)$$

$$I_{\infty} := \int_1^{\infty} (\arctg x)^a \frac{\sin x}{2x + 1} dx. \quad (4)$$

Pro vyšetření chování integrálu  $I_0$  použijeme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctg x)^a \frac{\sin x}{2x+1}}{x^{a+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arctg x}{x} \right)^a \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2x+1} = 1,$$

proto  $I_0$  konverguje (podle limitního srovnávacího kritéria) právě když konverguje  $\int_0^1 x^{a+1} dx$ , což je právě tehdy, když  $a > -2$ .

2R

**Příklad 3 :** Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n^2},$$

kde symbolem log značíme přirozený logaritmus, tedy logaritmus o základu  $e$ . (15 bodů)

**Řešení :** Položíme  $a_n := \left(1 - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n^2}$ . Protože platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = 1$ , je určitě  $a_n \geq 0$  pro všechna dostatečně velká přirozená<sup>1</sup>  $n$ , a můžeme proto použít (limitní) odmocninové kritérium.

Platí:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^n = e^{n \log(1 - \log(\frac{n+1}{n}))} =: e^{A_n}.$$

Dále je

$$A_n = n \log\left(1 - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \underbrace{n}_{P_n} \cdot \underbrace{\log\left(1 - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)}_{Q_n} = \underbrace{n}_{P_n} \cdot \underbrace{\frac{-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{-\left(\frac{n+1}{n} - 1\right)}}_{R_n} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{n+1}{n}\right)}_{S_n}.$$

Všimněte si, jakých úprav používáme, abychom co nejvíce při výpočtu  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  využili základních limit pro logaritmus. Dále už je výpočet jednoduchý, i když jeho správné odůvodnění v sobě skýtá jisté možnosti nečekaných bodových ztrát:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \cdot S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 1 \quad (\text{základní limita pro logaritmus a využití Heineho věty s } y_n = -\log\left(\frac{n+1}{n}\right)),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 1 \quad (\text{obdobné odůvodnění jako pro } Q_n).$$

Celkově tedy je podle věty o aritmetice limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = -1, \quad \text{a proto} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Protože  $1/e < 1$ , plyne z limitního odmocninového kritéria, že námi vyšetřovaná řada konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- $a_n \geq 0$  ..... 2 body
- výpočet  $Q_n$  ..... 4 body
- výpočet  $R_n$  ..... 3 body
- $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = -1$  ..... 2 body
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1}$  ..... 1 bod
- závěr, že řada konverguje dle odm. kritéria ..... 3 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění limity složené funkce ..... 2 body
- aritmetika limit ..... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

<sup>1</sup>Dá se dokonce jednoduše spočítat, že  $\left(1 - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) \geq 0$  a tedy i  $a_n \geq 0$  pro všechna přirozená  $n$ , není to však nutné: odmocninové kritérium potřebuje pouze, aby existovalo přirozené  $n_0$ , že  $a_n \geq 0$  pro všechna přirozená  $n \geq n_0$ .

21

**Příklad 3 :** Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+2^n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right).$$

(15 bodů)

**Řešení :** Položme

$$x_n := \frac{1+2^n}{3^n}, \quad y_n := \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}. \quad (6)$$

Není těžké odhadnout, že  $x_n$  „se chová pro velká  $n$  jako“  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ , a také, že  $y_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}$  „se chová pro velká  $n$  jako“  $\frac{1}{n^{1/4+1/2}} = \frac{1}{n^{3/4}}$ .

Přesněji, pro  $x_n$  máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^n}{3^n} \cdot \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^n} + 1 \right) = 1, \quad (7)$$

zatímco pro  $y_n$  máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\frac{1}{n^{1/4+1/2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Ve výpočtech používáme věty o aritmetice limit, skutečnosti, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Protože řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  konverguje (buď podle odmocninového kritéria nebo konstatováním faktu, že jde o geometrickou řadu s kvocientem  $\frac{2}{3}$ ), dále pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$  diverguje (s využitím znalosti, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\gamma}$  konverguje právě tehdy, když  $\gamma > 1$ ), a konečně protože členy všech čtyř řad v (7), (8) jsou nezáporné, dostaneme dvojím použitím limitního srovnávacího kritéria, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n} \text{ konverguje, zatímco } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \text{ diverguje.}$$

**První možnost zakončení:** Z výše uvedeného již plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+2^n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right) \text{ diverguje,}$$

neboť kdyby tato řada konvergovala, musela by (protože rozdíl dvou konvergenčních řad je konvergentní řada) konvergovat i řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+2^n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right) - \left( \frac{1+2^n}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$ , což není pravda.

**Druhá možnost zakončení:** Pro všechna přirozená  $n$  platí  $\frac{1+2^n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} > \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$

a protože řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right)$  diverguje, diverguje podle srovnávacího kritéria i řada, kterou jsme měli vyšetřit.

Bodování při použití prvního postupu při výpočtu (při druhém budou body přerozděleny):

- konvergence  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  ..... 5 bodů
- divergence  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  ..... 6 bodů
- divergence  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$  ..... 4 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  konverguje a proč ..... 1+1 bod
- odůvodnění:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$  diverguje a proč ..... 1+1 bod
- odůvodnění: zmínky, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$  pro  $\beta > 0$  ..... 1 bod
- odůvodnění užití limit. srov. krit.: limity (7), (8) jsou vlastní a nenulové ..... 1 bod
- odůvodnění užití limit. srov. krit.: jde o řady s nezápornými členy ..... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.